確率漸化式【初級編】

確率漸化式の問題とは，ある試行を n 回行ったとき，ある事象が起こる確率を p_n とする．このとき，p_n と p_{n+1} の関係式を求めてから p_n を求めるような問題をいいます．隣接２項間漸化式や連立漸化式のようにやや複雑な式を立式して解かなければならないので，確率の知識だけでなく，数列の知識がかなり必要になるのです．よく出題される問題ではあるけれど，現役生の多くはやったことがないという声をよく聞きますので，この短期集中特訓を通してマスターしましょう！**【初級編】**では，単純な隣接２項間漸化式を立式して解く問題で立式の方法や仕組みを理解しましょう．

例題

袋の中に赤球 3 個と白球 6 個が入っている．袋から球を 1 個取り出し，取り出された赤球の個数を記録してから袋に戻す．この試行を n 回くり返したとき，記録された赤球の個数の合計が奇数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　p_1 を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n で表せ．

(3)　p_n を求めよ．

まず始めにするべきことは，問題を丁寧に読んで理解することです．そして，必要ならば簡単な図をかくことを心がけましょう！問題が把握できていないあるいは勘違いをしていたでは問題外です．では早速順番に解いてみましょう．

♣　♠

解答 と **解説**

(1)　記号の意味をしっかり理解できていますか？ p_1 は

1 回の試行で赤球が 1 個取り出される確率

を表すんですよね．ですから，

$$p_1 = \frac{3}{9} = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

となります．ここまでは問題ないでしょう．

(2)　さて，ここからが本番です．『 p_n と p_{n+1} の関係式を求めなさい』ということなので，漸化式を立式しなければいけません．大切なことは，

n 回目の試行が終わった時点で起こりうるすべての場合と確率を書き出す

ことです．本問の場合は，n 回目の試行が終わった時点で赤球の個数は奇数個か偶数個かのいずれかしかありません．n 回目の試行が終わった時点で赤球の個数が奇数個である確率が p_n なのですから，偶数個である確率は $1 - p_n$ ですね．ではこの 2 通りの場合において，$n+1$ 回目の試行が終わった時点で赤球が奇数個である場合を考えましょう．次のような図をかくと理解しやすいでしょう．

n 回目に赤球が奇数個であれば $n+1$ 回目に赤球が奇数個であるためには白球が出なければいけません．また，n 回目に赤球が偶数個であれば $n+1$ 回目に赤球が奇数個であるためには赤球が出なければいけません．つまり，$n+1$ 回目に赤球が奇数個である確率は，和の法則から次のようになります．

n 回目　　　$n+1$ 回目

赤球**奇数個**（p_n） $\xrightarrow[\text{白球}]{\frac{2}{3}}$ 赤球**奇数個**（p_{n+1}）

赤球**偶数個**（$1-p_n$） $\xrightarrow[\text{赤球}]{\frac{1}{3}}$ 赤球**奇数個**（p_{n+1}）

$$p_{n+1}=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{白球}}\cdot p_n+\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{赤球}}\cdot(1-p_n)$$

$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

これで，p_{n+1} と p_n の関係式が得られました．あとは (3) でこれを解けばよいので，ここからは隣接２項間漸化式を解く問題になります．

(3)　(2) で得られた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3} \quad \iff \quad p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である．よって，

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \iff \quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

答えが求まったら，$n=1,\ 2$ の場合を計算して検算しましょう．もちろん解答に書く必要はありません．しかし，$n=1,\ 2$ の場合が間違っていた場合，答えは当然違うのですから，見直しをする必要があります．漸化式の立式が間違っていたのか？漸化式を解くときに間違えたのか？いずれにしても大きなダメージです．数列は特に検算しやすい分野ですので，検算する癖をつけておいてください．

♢　　　♡

この 例題 は，確率漸化式の基本ですからまずはこれをしっかりと理解してください．これが理解できた人は，実際に自分で確率漸化式を立式してみましょう．基本的なものを 2 題用意しましたので，実際に解いてみてください．解答の書き方がよくわからないという人もいると思いますので，次の問題の解答を参考にしてください．

◀類題演習▶

1 （'07　北九州市立大・改）　解答 ☞ p.4

袋 A の中に白玉 9 個と赤玉 1 個が入っており，袋 B の中に白玉 8 個が入っている．袋 A，袋 B からそれぞれ 2 個の玉を取り出し，それらを互いに入れかえる操作 S を考える．操作 S を n 回行った後，袋 A に赤玉が入っている確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

（1）　p_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n で表せ．

（3）　p_n を求めよ．

2 （'02　新潟大）　解答 ☞ p.5

袋の中に赤球 4 個と白球 6 個が入っている．3 個を同時に袋から取り出し，取り出された赤球の個数を記録してから袋に戻す．この試行を n 回くり返したとき，記録された赤球の個数の合計が奇数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1）　p_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n で表せ．

（3）　p_n を求めよ．

1 解答 と 解説

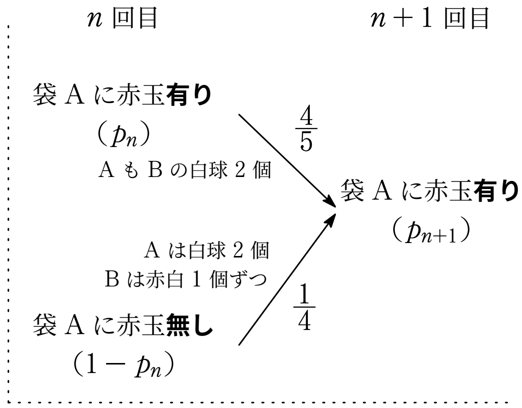
(1)　1 回の操作で袋 A に赤玉があるためには，袋 A, B から白玉をそれぞれ 2 個取り出せばよいので，

$$p_1 = \underbrace{\frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}}_{\text{A から白 2}} \times \underbrace{\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}}_{\text{B から白 2}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　n 回目の操作で，袋 A に赤玉があるとき，$n+1$ 回目の操作で袋 A に赤玉があるための確率は，(1) から

$$p_n \times p_1 = \frac{4}{5}p_n$$

また，n 回目の操作で，袋 A に赤玉がないとき，袋 A には白玉が 10 個，袋 B には白玉 7 個，赤玉 1 個が入っている状態である．このときの確率は，余事象の確率から $1-p_n$ となる．$n+1$ 回目の操作で袋 A に赤玉があるためには，袋 A から白玉 2 個，袋 B から白玉 1 個，赤玉 1 個を取り出せばよいので，



$$(1-p_n) \times \underbrace{\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}}_{\text{A から白 2}} \times \underbrace{\frac{{}_7\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}}_{\text{B から白 1 赤 1}} = \frac{1}{4}(1-p_n)$$

ゆえに，$n+1$ 回の操作で袋 A に赤玉が入ってる確率 p_{n+1} は，

$$p_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) \iff \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{11}{20}p_n + \frac{1}{4}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = \frac{11}{20}p_n + \frac{1}{4} \iff p_{n+1} - \frac{5}{9} = \frac{11}{20}\left(p_n - \frac{5}{9}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{5}{9}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{5}{9} = \frac{11}{45}$，公比 $\frac{11}{20}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{5}{9} = \frac{11}{45}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} = \frac{4}{9}\left(\frac{11}{20}\right)^n$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\left(\frac{11}{20}\right)^n} \cdots\cdots(\textbf{答})$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

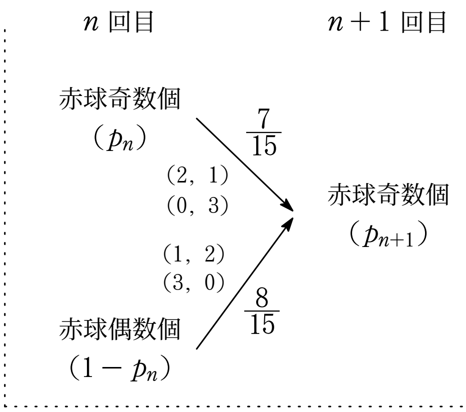
2 つの玉を取り出すので注意しながら計算しないといけません．図をかけば，例題 と同じ仕組みであることがわかるはずです．

2 解答 と 解説

(1)　1 回の操作で取り出された赤球の個数が奇数個となるのは，（赤球の個数，白球の個数）として表すと，$(1, 2), (3, 0)$ の 2 通りがあるので，求める確率は，

$$p_1 = \underbrace{\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3}}_{(1,2)} + \underbrace{\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}}_{(3,0)} = \boldsymbol{\frac{8}{15}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　n 回の操作で取り出された赤球が偶数個である確率は，$1 - p_n$ である．



（ i ）n 回の操作で取り出された赤球の個数が奇数個であるとき，$n+1$ 回目の操作で

Ⓐ　$(2, 1)$　　　Ⓑ　$(0, 3)$

となればよいので，その確率は，

$$p_n \times \left(\underbrace{\frac{{}_4C_2 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3}}_{(2,1)} + \underbrace{\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}}_{(0,3)} \right) = \frac{7}{15} p_n$$

（ii）n 回の操作で取り出された赤球の個数が偶数個であるとき，$n+1$ 回目の操作で

Ⓒ　$(1, 2)$　　　Ⓓ　$(3, 0)$

となればよいので，その確率は，(1) を利用して，

$$(1 - p_n) \times p_1 = \frac{8}{15}(1 - p_n)$$

ゆえに，$n+1$ 回の操作で赤球が奇数個取り出される確率 p_{n+1} は，

$$p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{8}{15}(1 - p_n) \iff \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{15} p_n + \frac{8}{15}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = -\frac{1}{15} p_n + \frac{8}{15} \iff p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{15}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$，公比 $-\frac{1}{15}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{15}\right)^n$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{15}\right)^n} \cdots\cdots\textbf{(答)}$

♣　◇　♠　♡

解説

今度は，3 つの玉を取り出すので **1** よりやや複雑になっています．取り出す場合をもらさないように注意しなくてはいけません．

さて，例題とその類題演習では玉を取り出す問題を扱いました．その他にも様々なシチュエーションで漸化式を求める問題がありますので，問題をじっくりと理解して解いてみてください．**3** **4** は四面体の頂点上を動く点について，**5** は 2 つの物質変化についての問題です．もちろん考え方はこれまでとまったく同じです．

3　（'04　岡山理科大）　解答 ☞ p.7

正四面体のある頂点に 1 匹のアリがいる．このアリは 1 分間たつごとに他の頂点へそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．n 分後に，初めにいた頂点にアリがいる確率を p_n とするとき，次の設問に答えよ．

(1)　p_2, p_3 を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3)　p_n を求めよ．

4　（'06　山口大）　解答 ☞ p.8

四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点から頂点に動く点 Q がある．1 つのさいころを投げ，出た目に応じて Q は次のルールにしたがって動く．

ルール：　さいころを投げる前，Q は A_k にあるとする．さいころを投げたとき，出た目 l が k, 5, 6 のいずれにも等しくなければ Q は A_l に動き，l が k, 5, 6 のいずれかに等しければ Q は A_k にとどまる．

最初 Q は A_1 にあるとする．さいころを n 回投げたとき，Q が A_1 にある確率を p_n とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　p_1, p_2 を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3)　p_n を求めよ．

5　（'05　東京薬科大・改）　解答 ☞ p.9

2 つの状態 X か Y をとる物質について，
X から 1 分後に Y になっている確率が $\frac{1}{5}$ で，Y から 1 分後に X になっている確率が $\frac{1}{10}$ である．この物質が，最初は X であるとして，n 分後に X である確率を a_n とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1)　a_1, a_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(3)　a_n を求めよ．

3 解答 と 解説

(1)　はじめにアリがいる頂点を A とする．2 分後に A にいるためには，はじめの移動はどこの頂点へ行ってもよく，次の移動で A に行けばよいので，

$$p_2 = \underbrace{1}_{1\text{ 分後}} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{2\text{ 分後}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

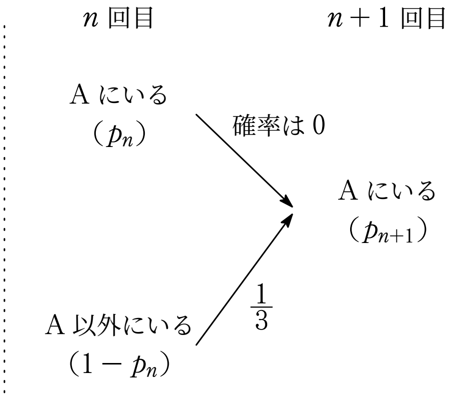
2 分後に A にいると 3 分後に A にいることはないので，2 分後に A にいないときを考える．その確率は，$1 - p_2 = \dfrac{2}{3}$ である．次の 1 分で A に移動すればよいので，

$$p_3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

(2)　n 分後にアリが A にいた場合，次の 1 分後に A にいることはない．n 分後にアリが A 以外の頂点にいる確率は $1 - p_n$ であり，次の移動で A に行けばよいので，

$$p_{n+1} = 0 \times p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$



(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

$$\iff \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \cdots\cdots (\textbf{答})$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

$p_1 = 0$ であることに注意しましょう．1 分後にはアリは必ず他の頂点に移動するので，1 分後に同じ頂点にいる確率は 0 です．漸化式を立式するときは，このことに注意しなければいけません．

4 解答 と 解説

(1) Q がその場にとどまる確率は，題意から $\dfrac{1}{2}$ であり，他のある頂点へ移動する確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ である．
1 回の移動で Q が A_1 にいるためには，さいころの目が 1, 5, 6 であればよいので，

$$p_1 = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

2 回の移動で Q が A_1 にいるためには，

1 回目に A_1 以外の点に移動して，2 回目に A_1 に移動する …… $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}$

1 回目，2 回目ともに A_1 にいる …… $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

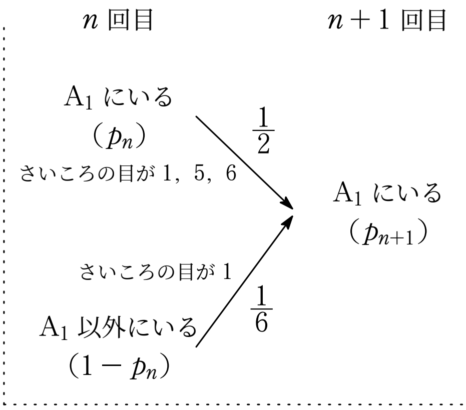
のいずれかであるから，

$$p_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) n 回目の移動後 Q が A_1 にいるとき $n+1$ 回目の移動で A_1 にいるためには，その場にとどまればよく．n 回目の移動後 A_1 以外の頂点にいるときは，$n+1$ 回目にさいころを振って 1 が出ればよいので，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\times p_n + \frac{1}{6}(1-p_n)$$

$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



(3) (2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}$$

$$\iff \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}\cdots\cdots(\textbf{答})$

♣ ♢ ♠ ♡

解説

移動のルールが少し複雑ですから，まずは問題を正しく理解することから始めなければいけません．あとは，自分なりにわかりやすいような図をかいたりするとよいでしょう．とどまる確率と，ある特定の頂点へ移動する確率が求められれば見通しが立つはずです．

5 解答 と 解説

(1)　1 分後に X になる確率は，余事象の確率から

$$a_1 = 1 - \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \cdots\cdots(\text{答})$$

2 分後に X になるのは，

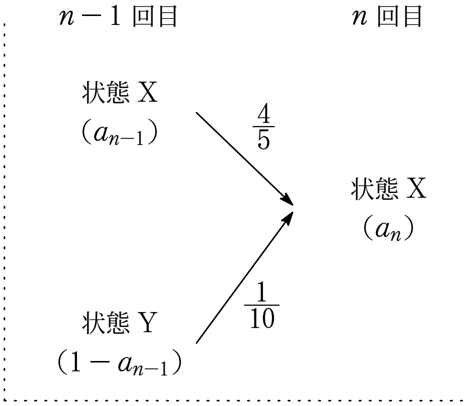
1 分後に Y になって，さらにその 1 分後に X になる　$\cdots\cdots$　$\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10}$

1 分後，2 分後ともに X のまま　$\cdots\cdots$　$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

のいずれかであるから，

$$a_2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{33}{50}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$n-1$ 分後は X か Y のいずれかである．
$n-1$ 分後に X であるとき，その 1 分後に X である確率は，$\dfrac{4}{5}$ であり，$n-1$ 分後に Y であるとき，その 1 分後に X になる確率は $\dfrac{1}{10}$ であるから，



$$a_n = \frac{4}{5} \times a_{n-1} + \frac{1}{10}(1 - a_{n-1})$$

$$\iff \quad \boldsymbol{a_n = \frac{7}{10} a_{n-1} + \frac{1}{10} \ (n \geqq 2)} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$a_n = \frac{7}{10} a_{n-1} + \frac{1}{10}$$

$$\iff \quad a_n - \frac{1}{3} = \frac{7}{10}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$$

となるので，数列 $\left\{a_{n-1} - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，第 2 項以降は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15}$，公比 $\dfrac{7}{10}$ の等比数列であるから，

$$a_{n-1} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2} \quad \iff \quad a_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{10}\right)^n} \cdots\cdots(\text{答})$

♣　◇　♠　♡

解説

確率漸化式の立式にも随分慣れてきたでしょうから，立式は結構すんなりできたはずです．ただし，今度は漸化式を解く段階で気をつけなければいけません．(2) で求めた隣接 2 項間漸化式は，$n \geqq 2$ で成り立っているものなので，(3) で解くときにいつもと若干ズレが生じてきます．そこに注意を払いながら解きましょう．また，答えが出たら，$n = 1, 2$ で成り立つことかどうかを確認することも忘れないでください．

これで**【初級編】**は終わりです．どうでしょうか？確率漸化式を立式する仕組みは理解できたでしょうか？これがしっかりとできるようになった人は次の**【中級編】**へ進んでください．今度は，もう少し複雑な確率漸化式が登場します．