計算演習問題【数学 Ⅲ 編】

数学 Ⅲ は，数学 Ⅱ の「三角関数・指数関数・対数関数・微分積分」の基礎がしっかりと備わっていて，かつ計算力が必要になる分野です．したがって，それなりに計算量をこなしておかなければいけません．ここでは，面積計算や体積計算を行うことで，基本的な定積分の計算を身につけましょう．そして，計算力を養ってください．

まず最初は，面積計算からです．簡単なグラフをかいて計算をするようにしてください．数学 Ⅲ ででてくるグラフは複雑なものが多く，式だけで計算すると間違った立式をしてしまうことがあるからです．複雑な面積を求める計算・媒介変数で表された曲線で囲まれる部分の面積・体積計算などは，後ほど扱うことにします．

1

次の各問いに答えよ．

（1） $y=\sin^2 x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（2） $y=(\log x)^2,\ x=e$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（3） $y=\sin x\cos^2 x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（4） $y=x\log x,\ x=e$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（5） $y \geqq \sin x,\ y \leqq \cos x,\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で表される領域の面積を求めよ．

（6） $0 \leqq y \leqq e^x \sin x,\ 0 \leqq x \leqq \pi$ で表される領域の面積を求めよ．

（7） $0 \leqq y \leqq \dfrac{\log x}{x^2},\ 1 \leqq x \leqq e$ で表される領域の面積を求めよ．

（8） $y=\cos^3 x\ (0 \leqq x \leqq \pi),\ x=0,\ x=\pi$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（9） $y=\sqrt{4-x^2}\ (0 \leqq x \leqq 2)$ と x 軸，y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

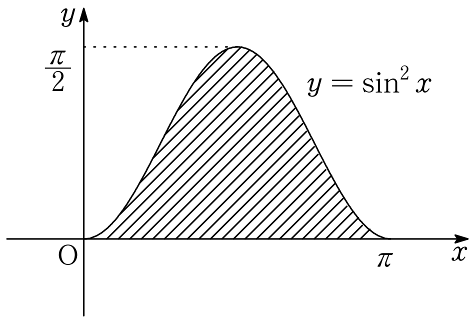
（10） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$，$x=-1,\ x=1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答　✎**注：** グラフをかく過程は省略しています．

求める面積を S とする．

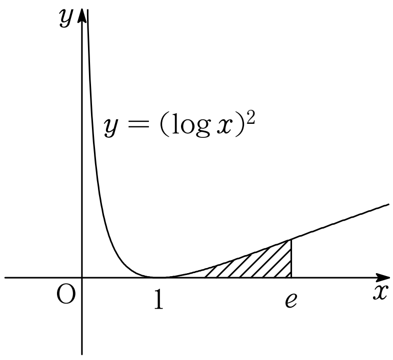
(1)　方針 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ を利用します．

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \cdots\cdots (\textbf{答}) \end{aligned}$$



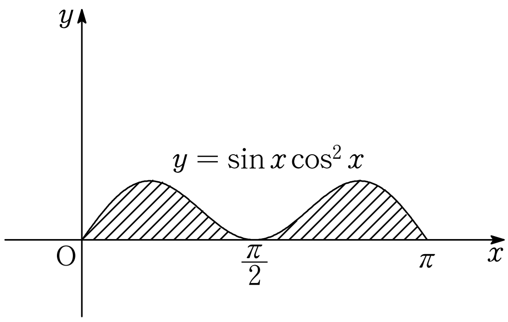
(2)　方針 部分積分を利用します．$\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C$ (C：積分定数) は覚えておきましょう．

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e} (\log x)^2\,dx \\ &= \left[\ x(\log x)^2\ \right]_1^{e} - \int_1^{e} x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= e - 2\int_1^{e} \log x\,dx \\ &= e - 2\left[\ x\log x - x\ \right]_1^{e} \\ &= e - 2\{(e-e)-(0-1)\} \\ &= \boldsymbol{e-2} \cdots\cdots (\textbf{答}) \end{aligned}$$



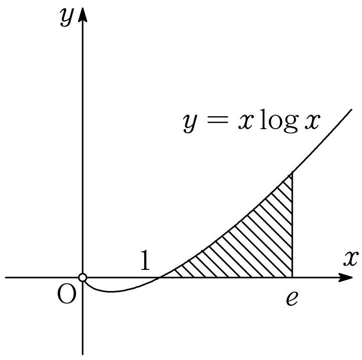
(3)　方針 $(\cos^3 x)' = -3\sin x\cos^2 x$ を利用します．

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x\cos^2 x\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)' dx \\ &= \left[\ -\frac{1}{3}\cos^3 x\ \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}} \cdots\cdots (\textbf{答}) \end{aligned}$$



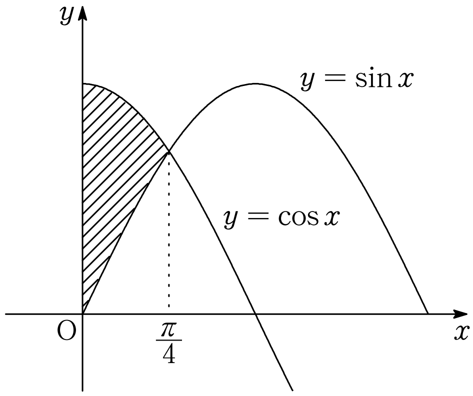
(4) $\boxed{\text{方針}}$ 部分積分を利用します.

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^e x\log x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2+1)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$



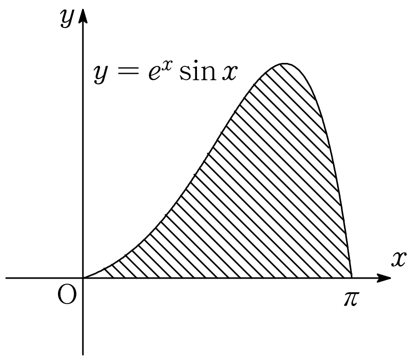
(5) $\boxed{\text{方針}}$ (上の関数) − (下の関数) で計算します.

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx \\
&= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) \\
&= \boldsymbol{\sqrt{2}-1}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$



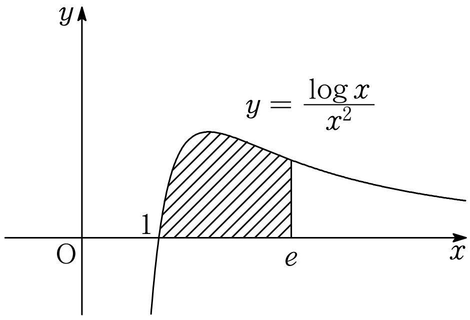
(6) $\boxed{\text{方針}}$ 部分積分を利用すると同じ形が出てきます.

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx \\
&= \left[e^x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx \\
&= -\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx \\
&= -\left(\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x(-\sin x)\,dx\right) \\
&= -(e^{\pi}\cos\pi - e^0\cos 0) - S \\
2S &= e^{\pi}+1 \\
\therefore\ S &= \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$



(7) 方針 $\dfrac{\log x}{x^2} = x^{-2}\log x$ とみて部分積分を利用します．

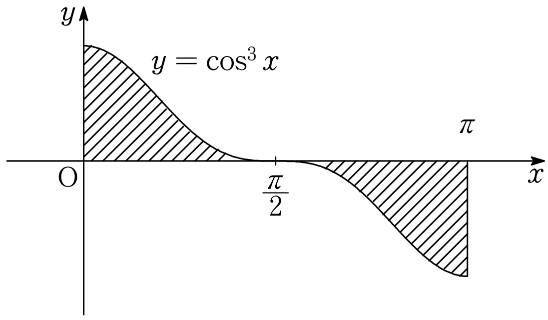
$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,dx \\ &= \int_1^e x^{-2}\log x\,dx \\ &= \Big[-x^{-1}\log x\Big]_1^e - \int_1^e (-x^{-1})\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -e^{-1} + \int_1^e x^{-2}\,dx \\ &= -e^{-1} + \Big[-x^{-1}\Big]_1^e \\ &= -e^{-1} + (-e^{-1}+1) \\ &= \boldsymbol{1-\frac{2}{e}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



(8) 方針 $y = \cos^3 x$ が点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\,0\right)$ において対称であることと，$\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$ を利用します．

$y = \cos^3 x$ は点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\,0\right)$ において対称であるから，

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



(9) 方針 $x = 2\sin t$ と置換します．円の $\dfrac{1}{4}$ であることを利用しても求められます．

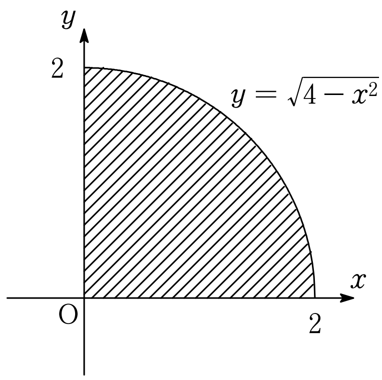
$$S = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

ここで，$x = 2\sin t$ とおくと，$dx = 2\cos t\,dt$ であり，

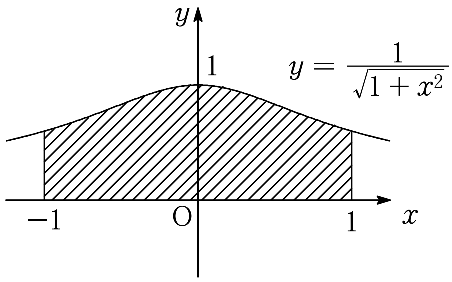
x	$0 \to 2$
t	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

となるので，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt \\ &= 2\Big[t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\pi}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



(10) $\boxed{\text{方針}}$ 後半の式変形が難しい問題です．まずは，$x = \tan t$ と置換します．



$y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ は y 軸に関して対称であるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$x = \tan t$ とおくと，$dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$ であり，

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

となるので，

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos t}{1-\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sin t}\right) dt \\ &= \Big[-\log|1-\sin t| + \log|1+\sin t| \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\log\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \log(\sqrt{2}+1)^2 \\ &= \mathbf{2\log(\sqrt{2}+1)}\text{……(答)} \end{aligned}$$