問題 ('05　九州歯科大)　　【難易度】 … 標準

二等辺三角形 OAB において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{3}$ とする．OA を $s:(1-s)$ に内分する点を D とし，OB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とする．さらに，AB の中点を F とし，OF と DE の交点を G とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right| = a:(1-a)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GE}}\right| = b:(1-b)$ とおくとき，a と b を s と t を用いて表せ．

(2)　線分 DE の長さ L を s と t を用いて表せ．

(3)　点 D と E は，それぞれ OA と OB 上を，線分 DE が三角形 OAB の面積を二等分するように動くとする．このとき，t を s を用いて表せ．さらに，線分 DE の長さ L の最小値を求めよ．

【テーマ】：線分比と面積の最小値

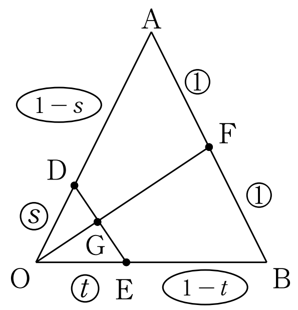
方針

前半は，内分の公式を利用して計算します．(3) は (2) で求めた L と (3) で求めた s, t の関係式を利用して 1 文字消去して相加平均・相乗平均の関係を用います．

♣　♠

解答

(1)　点 F は線分 AB の中点であり，OG : GF $= a:(1-a)$ より，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= a\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\ &= a\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\\ &= \frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

また，△ODE で，DG : GE $= b:(1-b)$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (1-b)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+b\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\ &= (1-b)s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+bt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}=(1-b)s & \cdots\cdots\ ①\\[2mm] \dfrac{a}{2}=bt & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

①, ② より，

$$bt=(1-b)s \iff bt+bs=s \iff b=\frac{s}{s+t}$$

であり，② より，

$$\frac{a}{2}=\frac{st}{s+t} \iff a=\frac{2st}{s+t}$$

ゆえに，$\boldsymbol{a=\dfrac{2st}{s+t}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{s}{s+t}}$ ……(答)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2$$

$$= \left|t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$= t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$= 4t^2 - 2st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB} + 9s^2$$
$$= 4t^2 - 2st\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + 9s^2$$
$$= 4t^2 - 4st + 9s^2$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| > 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = L = \boldsymbol{\sqrt{4t^2 - 4st + 9s^2}}$……(答)

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}, \triangle\mathrm{ODE}$ の面積は，それぞれ

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$$
$$\triangle\mathrm{ODE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$$

であり，条件より，$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{ODE}$ であるから，

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} = 2\cdot\frac{1}{2}st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} \iff st = \frac{1}{2} \quad\cdots\cdots③$$

よって，$t = \dfrac{1}{2s}$ （$\because\ s \neq 0$）となるので，(2) で求めた L に代入すると，

$$L = \sqrt{4\cdot\frac{1}{4s^2} - 4s\cdot\frac{1}{2s} + 9s^2} = \sqrt{9s^2 + \frac{1}{s^2} - 2}$$

となる．$s^2 > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$9s^2 + \frac{1}{s^2} \geqq 2\sqrt{9s^2\cdot\frac{1}{s^2}} = 6$$

等号は，$9s^2 = \dfrac{1}{s^2}$ すなわち $s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ （$\because$ ③）のとき，成立する．よって，

$9s^2 + \dfrac{1}{s^2} - 2 \geqq 4$ が成り立ち，$\sqrt{9s^2 + \dfrac{1}{s^2} - 2} \geqq 2$ となるので，$L \geqq 2$

を得る．ゆえに，$s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，L の最小値は **2**……(答) である．

◇ ♡

解説

(3) のように，三角形の面積を二等分するときの線分 DE の長さの最小値を求める問題は，様々な大学で類題が出題されています．(例：1999 年東京工業大学・2005 年名古屋女子大学) 最小値を求めるときに『相加平均・相乗平均の関係』を用いることがポイントになります．