問題 ('02　東北芸術工科大)　【難易度】… 基本

数列 $\{a_n\}$ は初項と漸化式が,

$$a_1=2,\ na_{n+1}=(n+1)a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義されている．この数列の一般項 a_n を求めよ．

【テーマ】: 隣接２項間漸化式

方針

両辺を $n(n+1)\fallingdotseq 0$ で割って置き換えをすれば，階差数列型の隣接 2 項間漸化式に帰着します．また，本問は $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めて類推することも可能です．

階差数列型の隣接 2 項間漸化式を解くときには，$n\geqq 2$ と $n=1$ で場合分けをしなければならない点に注意が必要になります．

♣ ♠

解答

与えられた漸化式の両辺を $n(n+1)\fallingdotseq 0$ で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

となるので，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと,

$$b_1=2,\quad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$$

であるから，$n\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\\
&= 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 2+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}\\
&= 2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= 3-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つことから，$b_n=3-\dfrac{1}{n}=\dfrac{3n-1}{n}$ となる．よって,

$$a_n=nb_n=\mathbf{3n-1}\cdots\cdots(\text{答})$$

別解

類推して，数学的帰納法で証明する解法です．

与えられた漸化式から,

$$\begin{aligned}
a_2&=2a_1+1 &\therefore\ a_2&=5=3\cdot 2-1\\
2a_3&=3a_2+1 &\therefore\ a_3&=8=3\cdot 3-1\\
3a_4&=4a_3+1 &\therefore\ a_4&=11=3\cdot 4-1
\end{aligned}$$

となるので，$a_n=3n-1$ と類推することができる．これを数学的帰納法で証明する．

【証明】

（ｉ） $n=1$ のとき，$a_1=3\cdot1-1=2$ であるから，$n=1$ のときは成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，

$$a_k=3k-1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定すると，与えられた漸化式において $n=k$ のとき，

$$\begin{aligned} ka_{k+1}=(k+1)a_k+1 &\iff ka_{k+1}=(k+1)(3k-1)+1 \quad (\because \ ①) \\ &\iff ka_{k+1}=3k^2+2k \\ &\iff a_{k+1}=3k+2 \quad (\because \ k\neq 0) \\ &\iff a_{k+1}=3(k+1)-1 \quad (\because \ k\neq 0) \end{aligned}$$

となるので，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して，$a_n=3n-1$ となることが示された． （証明終）

ゆえに，$\boldsymbol{a_n=3n-1}$……(答)

解説

別解 では，類推して数学的帰納法で証明する方法を挙げました．答えの形が比較的簡単な場合は，類推できるので有効な手段ですが，答えが複雑な形をしているときは類推するのは困難なので，万能ではないことを知っておきましょう．本問の場合は，本解のように両辺を $n(n+1)\neq 0$ で割る方法が一般的です．ただし，解答をかくときは，$\neq 0$ という部分を忘れないようにしましょう．