**問題** （'99　和歌山大） 【難易度】 … 標準

数直線上の点 Q は，2 枚のコインを同時に投げて，どちらも表が出たら $+1$ 移動し，どちらも裏が出たら $-1$ 移動し，他の場合はその位置にとどまる．Q の出発点の座標を $A_0=0$ とし，このコイン投げを $n$ 回繰り返した後の Q の座標を $A_n$ とする．$X$ を $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ の最大の値とするとき，次の問いに答えよ．

（1） $A_4=0$ となる確率を求めよ．

（2） $A_4=0$ になったとして，$X=0$ となる条件つき確率を求めよ．

【テーマ】：条件つき確率

**方針**

移動の確率なので，図を描いて考えると分かり易くなります．

---

**解答**

（1） 事象 $X, Y, Z$ を

$X$ ： $+1$ の移動

$Y$ ： $-1$ の移動

$Z$ ： とどまる

と定める．事象 $X, Y, Z$ が起こる回数を $(X, Y, Z)$ で表すことにする．

$A_4=0$ となるのは，

$$(X, Y, Z)=(1, 1, 2),\ (2, 2, 0),\ (0, 0, 4)$$

の 3 通りであるから，求める確率は，

$$\begin{aligned}\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4&=\frac{12}{2^6}+\frac{6}{2^8}+\frac{1}{2^4}\\&=\frac{48+6+16}{2^8}\\&=\mathbf{\frac{35}{128}}\cdots\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

（2） $A_4=0$ となる確率を $P(S)$ とし，$X=0$ となる確率を $P(T)$ とすると，求める確率は，

$$P_S(T)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}$$

である．(1) より，$P(S)=\dfrac{35}{128}$ である．次に，$A_4=0$ かつ $X=0$ となるときを考える．

次の図のように，横軸に数直線をとり縦軸下方向にコインを投げた回数を取る．太線部分を移動し 4 回目で 0 に戻ってくるときを考えればよい．ここで，$\mathrm{P}_1\sim\mathrm{P}_8$ を図の位置で定義し，それぞれの点に到達する確率を $p_1\sim p_8$ で表すことにする．

ここで，題意より右下と左下に移動する確率はともに $\dfrac{1}{4}$ であり，真下に移動する確率は $\dfrac{1}{2}$ となる．

$$p_1=\frac{1}{4},\quad p_2=\frac{1}{2}$$

$$p_3=\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{16},\quad p_4=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}p_2=\frac{1}{4},\quad p_5=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{2}p_2=\frac{5}{16}$$

$$p_6=\frac{1}{4}p_3+\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{4}p_5=\frac{7}{32},\quad p_7=\frac{1}{4}p_4+\frac{1}{2}p_5=\frac{7}{32}$$

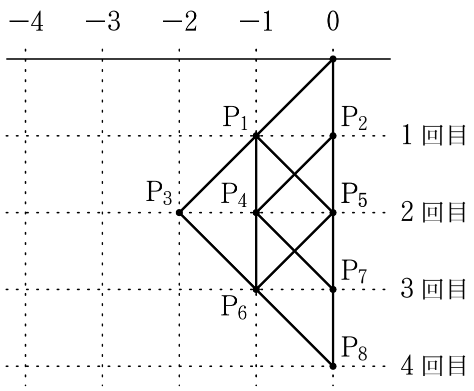
ゆえに，$p_8$ は，

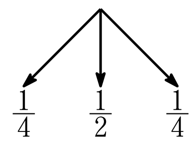
$$p_8 = \frac{1}{4}p_6 + \frac{1}{2}p_7 = \frac{21}{128}$$

である．したがって，求める確率は，

$$P_S(T) = \frac{\frac{21}{128}}{\frac{35}{128}} = \mathbf{\frac{3}{5}}\cdots\cdots(答)$$

である．




◇ ♡

解説

コインを投げて移動するので反復試行の確率を考えます．(2) は，移動の確率なので，図を描いて考えました．もう少し規模が大きくなるとこれでは計算が大変ですから同じ確率をまとめて計算するとよいでしょう．例えば，$\mathrm{O} \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_8$ と $\mathrm{O} \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_5 \to \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_8$ が同じ確率になります．