問題 （'12　九州工業大・改） 【難易度】 … 標準

O を原点とする座標平面上に点 $P_0(1,\ 1)$, $Q_0(1,\ 0)$ がある．ある $p\ (0 < p < 1)$ に対して，点 $P_1(p,\ p)$, $Q_1(p,\ 0)$ を定め，さらに，自然数 n について点 P_{n+1}, Q_{n+1} を次のように定める．

・点 Q_n を通り直線 Q_0P_1 と平行な直線と，直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする．

・点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と，x 軸の交点を Q_{n+1} とする．

また，$\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とするとき，以下の問いに答えよ．

（1） S_1 を p を用いて表せ．

（2） 点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき，点 Q_n の x 座標を $p,\ q$ を用いて表せ．

（3） S_n を $p,\ n$ を用いて表せ．

（4） n を定数として，p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき，S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ．

（5） （4）で求めた S_n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

【テーマ】：無限等比級数と極限

方針

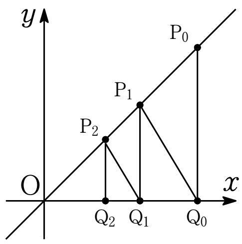
(1)～(3) は，面積 S_n を求める誘導です．漸化式を立式して解けば求まります．(4) は，最大値を求めたいので微分しましょう．(5) は，関数の極限に関する公式が必要になります．

♣ ♠

解答

（1） S_1 は $\triangle Q_0P_1Q_1$ の面積である．$P_1Q_1 = p$, $Q_1Q_0 = 1 - p$ であるから，

$$S_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}p(1-p)} \cdots\cdots(答)$$



（2） 直線 P_1Q_0 の傾きは，$\dfrac{p}{p-1}$ であるから，直線 $Q_{n-1}P_n$ の方程式は，

$$y = \frac{p}{p-1}(x-q)$$

である．これと $y = x$ の交点が P_n であるから，

$$x = \frac{p}{p-1}(x-q)$$
$$x = pq$$

ゆえに，Q_n の x 座標は，$\boldsymbol{pq}$……(答)

（3） Q_n の x 座標を q_n とする．このとき，(2) より，$q_{n+1} = pq_n$ となるので，$q_0 = 1$ より，

$$q_n = p^n$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}P_nQ_n \times Q_nQ_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}p^n\left(p^{n-1} - p^n\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(p^{2n-1} - p^{2n}\right)} \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

(4) (3) より，S_n を p で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dS_n}{dp} &= \frac{1}{2}\left\{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}p^{2n-2}(2n-1-2np)\end{aligned}$$

$0 < p < 1$ より，$\dfrac{dS_n}{dp} = 0$ となるのは，$p = \dfrac{2n-1}{2n}$ のときで，このとき，増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{2n-1}{2n}$	$\cdots$	1
$\frac{dS_n}{dp}$		$+$	0	$-$	
S_n		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，S_n が最大となる p は，

$$p = \boldsymbol{\frac{2n-1}{2n}} \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，このとき，

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}\left(1 - \frac{2n-1}{2n}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}} \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(5) (4) より，求める極限値は，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nS_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\frac{2n}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[\left\{1+\frac{1}{(-2n)}\right\}^{-2n}\right]^{-1}\cdot\frac{2}{2-\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{4}e^{-1}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{4e}} \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

丁寧な誘導があるので，一つ一つの設問を確実に解けるようにしましょう．(5) では，自然対数の底に冠する極限を利用しなければいけないので，忘れていた人は思い出しておきましょう．

【自然対数の底に関する極限】

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

これらの公式は，置き換えを行うことで同値であることが証明できる．