問題 ('08 東京医科歯科大) **【難易度】** … 標準

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の 4 条件を満たしている.

(a) 任意の正の実数 x について $f(x)>0$, $g(x)>0$

(b) 任意の実数 x について $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(c) 任意の実数 x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2$

このとき以下の各問いに答えよ.

(1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ.

(2) $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ.

(4) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ.

(5) 曲線 $y=f(x)g(x)$, 直線 $x=a\ (a>0)$ および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ.

【テーマ】:関数方程式

方針

$x=y=0$ を代入したり, $y=-x$ を代入したり, 微分の定義式を用いたりして計算します.

♣ ♠

解答

(1) 条件 (b) に $x=0$ を代入すると,

$$g(0)=\mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

条件 (c) に $x=y=0$ を代入すると,

$$f(0)=f(0)\cdot f(0) \iff \{f(0)\}^2-f(0)=0 \qquad \therefore\ f(0)=0,\,1$$

ここで, 条件 (c) に $x=0, y=1$ を代入すると,

$$f(1)=f(0)\cdot f(1)+g(0)\cdot g(1) \iff f(1)\{1-f(0)\}=0$$

$f(1)>0$ より, $f(0)=1$ であるから, $f(0)=\mathbf{1}\cdots\cdots$(**答**)

(2) 条件 (c) に $y=-x$ を代入して,

$$f(0)=f(x)\cdot f(-x)+g(x)\cdot g(-x) \iff 1=f(x)\cdot f(x)+g(x)\cdot(-g(x)) \quad (\because\ \text{(b)})$$

よって, $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\mathbf{1}\cdots\cdots$(**答**)

(3) (2) より,

$-\{g(x)\}^2=1-\{f(x)\}^2=\{1-f(x)\}\{1+f(x)\}$ より,

$$-\frac{\{g(x)\}^2}{x^2}=\frac{1-f(x)}{x}\cdot\frac{1+f(x)}{x}$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{1+f(x)}\cdot\left\{-\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{1+f(0)}\cdot(-4) \qquad (\because\ (\mathrm{d}))\\ &= \mathbf{-2}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+g(x)g(h)-f(x)}{h} \qquad (\because\ (\mathrm{c}))\\ &= \lim_{h\to0}\frac{f(x)(f(h)-1)+g(x)g(h)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\left(-f(x)\cdot\frac{1-f(h)}{h^2}\cdot h+\frac{g(x)g(h)}{h}\right)\\ &= -f(x)\cdot(-2)\cdot0+g(x)\cdot2\\ &= \boldsymbol{2g(x)}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(5) 条件 (a) より, $x>0$ で $y=f(x)g(x)$ は常に正であり, $g(0)=0$, $f(0)=1$ より, 求める図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^a f(x)g(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^a f(x)f'(x)\,dx \qquad (\because\ (4))\\ &= \left[\ \frac{1}{4}\{f(x)\}^2\ \right]_0^a\\ &= \frac{1}{4}\left[\{f(a)\}^2-\{f(0)\}^2\right]\\ &= \frac{1}{4}(\{f(a)\}^2-1)\end{aligned}$$

$S=1$ より,

$$4=\{f(a)\}^2-1 \iff \{f(a)\}^2=5$$

$f(a)>0$ より, $f(a)=\boldsymbol{\sqrt{5}}\cdots\cdots(\textbf{答})$

◇ ♡

解説

関数方程式の問題は, 何かの関数がモデルになっていることが多いです. 本問は, 条件 (b), (c) から三角関数の一種ではないかという予想がつきます. 実際は, 双曲線関数がモデルになっているようです. (双曲線関数については, 大学で学習するので, 高校数学の範囲外です.) 関数方程式は, $x=y=0$ などを代入したり, $y=-x$ を代入したりと, 解き方がある程度決まっているので, 何題か演習してコツをつかんでおきましょう.