問題 （’03　神戸大） 【難易度】 … 標準

$f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=0,\ f(\pi)=0$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$ を示せ．

(2) $f(x)=x(x-\pi)$ のとき，実数 a に対し $F(a)=\displaystyle\int_0^\pi\{af(x)-\sin x\}^2\,dx$ とする．a を変化させたとき，$F(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の計算

方針

(1) は，部分積分を利用します．(2) は，(1) で示した等式を利用すれば，$F(a)$ が求められます．

解答

(1) 【証明】

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx&=\Big[\,f(x)(-\cos x)\,\Big]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)(-\cos x)\,dx\\&=\Big[\,f'(x)\sin x\,\Big]_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx\quad(\because\ \ f(0)=0,\ f(\pi)=0)\\&=-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx\end{aligned}$$

よって，示された． （証明終）

(2) $F(a)=\displaystyle\int_0^\pi\left\{a^2\left(f(x)\right)^2-2af(x)\sin x+\sin^2 x\right\}\,dx$ である．ここで，各項の積分計算をすると，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi a^2\left(f(x)\right)^2\,dx&=\int_0^\pi a^2x^2(x-\pi)^2\,dx\\&=a^2\int_0^\pi(x^4-2\pi x^3+\pi^2x^2)\,dx\\&=a^2\Big[\,\frac{1}{5}x^5-\frac{\pi}{2}x^4+\frac{\pi^2}{3}x^3\,\Big]_0^\pi\\&=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi^5a^2\\&=\frac{\pi^5}{30}a^2\end{aligned}$$

一方，$f(0)=f(\pi)=0$ であるから，(1) の結果が使える．

$f(x)=x^2-\pi x$ より，$f'(x)=2x-\pi$，$f''(x)=2$

であるから，(1) より，

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx=-2\int_0^\pi\sin x\,dx=-4$$

となる．

$$\int_0^\pi\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{\pi^5}{30}a^2 - 2a\cdot(-4) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^5}{30}\left(a^2 + \frac{240}{\pi^5}a\right) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^5}{30}\left(a + \frac{120}{\pi^5}\right)^2 - \frac{480}{\pi^5} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

よって，$a = -\dfrac{120}{\pi^5}$ のとき，$F(a)$ は最小値をとることがわかるので，求める a の値は，

$\boldsymbol{a = -\dfrac{120}{\pi^5}}$……(答)

◇ ♡

解説

(1) がなくても，部分積分法を用いれば $F(a)$ は求めることができますが，本問では (1) があるので，それを用いた解答を出題者は想定しています．(1) を使う際は，等式が成り立つ条件 $f(0) = f(\pi) = 0$ を満たしていることの確認を怠らないようにしましょう．これがないと減点されてしまいます．

難易度としては標準的な問題なので，難関学部狙いの人は完答を目指しましょう．