

問題 ('03 神戸大)

【難易度】…標準

$f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で, $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

(1) $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = -\int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx$ を示せ.

(2) $f(x) = x(x - \pi)$ のとき, 実数 a に対し $F(a) = \int_0^\pi \{af(x) - \sin x\}^2 \, dx$ とする. a を変化させたとき, $F(a)$ を最小にする a の値を求めよ.