問題 ('04　防衛大)　　**【難易度】** … 標準

定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

(1)　$n\geqq 2$ として，$I_n=K_nI_{n-2}$ となる K_n を求めよ．

(2)　$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ を求めよ．

(3)　$I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と漸化式

方針

部分積分法を用いて，I_n に関する漸化式を立式します．

♣　♠

解答

(1)　部分積分法を用いて，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx\\
&= \Big[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx\\
&= (n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right\}\\
&= (n-1)(I_{n-2}-I_n)\\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\\
nI_n &= (n-1)I_{n-2}
\end{aligned}$$

$n\neq 0$ より，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{K_n=\dfrac{n-1}{n}}$ ……(**答**)

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{4}{5}I_3\\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1\\
&= \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\
&= \frac{8}{15}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{8}{15}\{0-(-1)\}\\
&= \boldsymbol{\frac{8}{15}}
\end{aligned}$$
……(**答**)

(3) (1) より,

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{5}{6}I_4 \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\ &= \frac{5}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

本問のように，定積分が n に依存しているような問題は，漸化式を作って解答する場合が多いので，代表的な問題には当たっておくとよいでしょう．例えば,

$$\int \sin^n x\,dx,\ \int \cos^n x\,dx,\ \int \tan^n x\,dx,\ \int (\log x)^n\,dx \quad \text{(積分区間は省略)}$$

のようなものです．大抵の問題は，誘導形式で出題されますが，難関大学や難関学部を志望している人は，誘導なしでも解けるようにしておきましょう．