問題 ('97　徳島大)　【難易度】… 標準

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とし，曲線 $C: y=f(x)$ を考える．$a>0$ のとき，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とし，点 P を通り接線 ℓ に垂直な直線を m とする．次の問いに答えよ．

(1)　直線 ℓ と m の方程式を求めよ．

(2)　直線 ℓ, m と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(3)　(2) で求めた V を最小にする a の値を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は，接線と法線を公式を用いて求めます．(2) は，回転体が円錐を 2 つ合わせたものなので，円錐の体積公式から求まります．(3) は，微分して最小にする a の値を増減表から求めます．

解答

(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より，直線 ℓ の方程式は，

$$y=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})(x-a)+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{\ell: y=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x-\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，法線 m の方程式は，

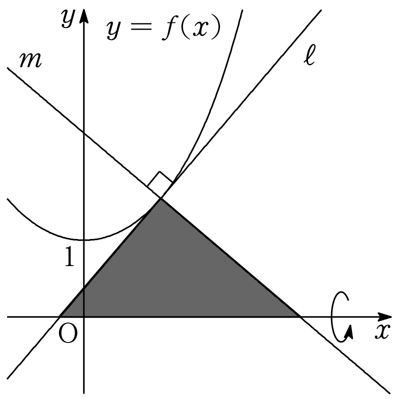
$$y=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}(x-a)+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{m: y=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}x+\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　ℓ と x 軸との交点の x 座標は，

$$0=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x-\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x=\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})-\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\therefore\quad x=a-\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}$$

であり，m と x 軸との交点の x 座標は，

$$0=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}x+\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\frac{2}{e^a-e^{-a}}x=\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$
$$\therefore\quad x=a+\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}$$



よって，回転体の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2\left\{\left(a+\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}\right)-\left(a-\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}\right)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\left(\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}+\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}\right)$$
$$=\frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a-e^{-a})^2(e^a+e^{-a})+4(e^a+e^{-a})}{4(e^a-e^{-a})}$$

$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a+e^{-a})\{(e^a-e^{-a})^2+4\}}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a+e^{-a})(e^a+e^{-a})^2}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(e^a+e^{-a})^5}{48(e^a-e^{-a})}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) (2) で求めた V を a で微分すると，

$$V' = \frac{\pi}{48}\cdot\frac{5(e^a+e^{-a})^4(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^5(e^a+e^{-a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{48}\cdot\frac{(e^a+e^{-a})^4\{5(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^2\}}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{12}\cdot\frac{(e^a+e^{-a})^4(e^{2a}-3+e^{-2a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$

$V'=0$ のとき，$e^a+e^{-a}>0$ より，

$$e^{2a}-3+e^{-2a}=0 \iff e^{4a}-3e^{2a}+1=0$$
$$\therefore\ e^{2a}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$a>0$ より $e^{2a}>1$ であるから，$e^{2a}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ である．$e^a>0$ より，

$$e^a=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \iff a=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

よって，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\cdots$
V'		$-$	0	$+$
V		↘		↗

したがって，V を最小にする a の値は，$\boldsymbol{a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}\cdots\cdots$(答)

◇ ♡

解説

(2) は，回転体の体積ですが，積分するのではなく円錐の体積公式を用いましょう．(3) は，V の最小値を与える a の値を求める問題ですが，実際に最小値を求めることもできるので，求めておきます．

$e^{2a}+e^{-2a}=3$ より，$(e^a+e^{-a})^2=5$ で，$e^a+e^{-a}>0$ より，

$$e^a+e^{-a}=\sqrt{5}$$

であり，

$$(e^a-e^{-a})^2=e^{2a}-2+e^{-2a}=1$$

であるから，$e^a-e^{-a}>0$ より，$e^a-e^{-a}=1$ を得る．したがって，$a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，V は最小値

$$V=\frac{\pi}{48}\cdot\frac{(\sqrt{5})^5}{1}=\frac{25\sqrt{5}}{48}\pi$$

をとる．