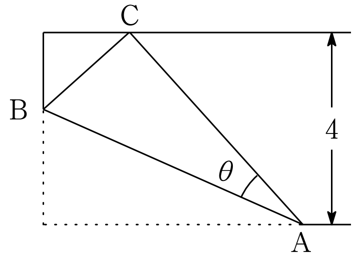
問題 （'99　名古屋大） 【難易度】 … 標準

右の図のように幅 4 のテープを端点 C が対辺に重なるように折るとき，三角形 ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ．



【テーマ】：最小値問題

方針

面積を θ を用いて表しますが，その際にどこかの辺を x とおくと，導きやすくなります．

♣ ♠

解答

$\mathrm{BC}=x$ とおくと，$(0<x<4)$

$$\mathrm{AC}=\frac{x}{\tan\theta}$$

また，$\sin 2\theta=\dfrac{4}{\mathrm{AC}}$ であるから，

$$\mathrm{AC}=\frac{4}{\sin 2\theta}$$

よって，$\dfrac{4}{\sin 2\theta}=\dfrac{x}{\tan\theta}$ より，$x=\tan\theta\cdot\dfrac{4}{\sin 2\theta}$ が成り立つ．

ゆえに，△ABC の面積を $S(\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sin 2\theta}\cdot\tan\theta\cdot\frac{4}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{8\sin\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)^2\cos\theta} \\ &= \frac{8}{4\sin\theta\cos^3\theta} \\ &= \frac{2}{\sin\theta\cos^3\theta} \end{aligned}$$

ここで，$f(\theta)=\sin\theta\cos^3\theta$ とおくと，$f(\theta)$ の最大値を求めればよい．ただし，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ である．

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos\theta\cos^3\theta+\sin\theta\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta) \\ &= \cos^2\theta(1-4\sin^2\theta) \end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$ のとき，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos^2\theta\neq 0$ なので，

$$1-4\sin^2\theta=0 \iff \sin\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって，増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(\theta)$	/	↗		↘	/

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

ゆえに，$S(\theta)$ の最小値は，

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\frac{3\sqrt{3}}{16}}=\frac{32}{3\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{9}}\cdots\cdots(\text{答})$$

別解

$S(\theta)$ を θ で微分して，直接最大値を求めると次のような計算になります．

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\frac{-2(\cos\theta\cos^3\theta+\sin\theta\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta))}{(\sin\theta\cos^3\theta)^2}\\&=\frac{-2\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)}{(\sin\theta\cos^3\theta)^2}\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$ のとき，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$\cos^2\theta\neq 0$ なので，

$$1-4\sin^2\theta=0 \iff \sin\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ であるから，$\theta=\frac{\pi}{6}$

よって，増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$	/	$-$	0	$+$	/
$S(\theta)$	/	↘		↗	/

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{32}{3\sqrt{3}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

ゆえに，$S(\theta)$ の最小値は，$\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{9}}\cdots\cdots(\text{答})$

◇ ♡

解説

どの長さを x とおくかで少々計算が変わってきますが，結局同じことをやることになります．$S(\theta)$ の最小値を求めるわけですが，$S(\theta)=\dfrac{2}{\sin\theta\cos^3\theta}$ のように，変数 θ が分母にしかないので，分母の最小値を求めればよいと考えます．**別解** を見てもわかるように，$S(\theta)$ を θ で微分するよりも，$f(\theta)$ を θ で微分して考えるほうがずっと楽に計算できることがわかると思います．しかも，結局微分した後は分子しか考えないため，$f'(\theta)$ の計算と同じになるのです．したがって，それ以降の計算はほとんど同じで，増減が逆になるという点だけが変わってきます．