問題 （'69　北海道大） **【難易度】** … **標準**

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ において

$$a_1 = 3,\quad a_2 = \frac{5}{3},\quad a_n = \frac{1}{3}(4a_{n-1} - a_{n-2}) \qquad (n \geqq 3)$$

という関係がある．

（1）　a_n を n の式で表せ．

（2）　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\log(a_k - 1)\log(a_{k+1} - 1)}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．ただし，対数は常用対数とする．

【テーマ】：隣接３項間漸化式と無限級数

方針

(1) では，特性方程式の解を利用して，与えられた漸化式を式変形します．(2) では，部分分数分解を行います．

♣　♠

解答

（1）　漸化式 $3a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ の特性方程式は，

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (3x-1)(x-1) = 0$$

であるから，解は $x = \dfrac{1}{3}, 1$ である．よって，与えられた漸化式は，次のように変形できる．

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-2} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

① より，

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3} \cdots\cdots \text{③}$$

② より，

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}(a_2 - a_1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{3} - 3\right) \\ &= -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

③×3−④ より，

$$2a_n = 2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \cdots\cdots\textbf{（答）}$$

（2）（1）より，S_n を変形すると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\log 3}\right)\left\{\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\left\{\left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^0} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^1}\right) + \left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^1} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{-n\log 3}{\log 2(\log 2 - n\log 3)}$$

$$= \frac{n}{(\log 2)^2 - n\log 2\log 3}$$

ゆえに,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(\log 2)^2}{n} - \log 2\log 3}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log 2\log 3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

隣接 3 項間漸化式の解法をまとめておきます．誘導なしで解けるようにしておきましょう．

（2）では,（1）の結果を代入することで部分分数分解ができるようになります．対数が絡んでいますが，考え方は通常の部分分数分解と同じです．

【隣接３項間漸化式】

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + r = 0$$

【解法と解説】

$r = 0$ のときは，$x^2 + px + q = 0$（**特性方程式**という）を解いてその解 $x = \alpha, \beta$ を求めると，

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

の 2 式が得られる．これは，等比数列型の漸化式であるから，両方を計算し，

$$a_{n+1} - \alpha a_n\ ,\quad a_{n+1} - \beta a_n$$

を求めれば，2 式を引くことから a_n が得られる．$\alpha = \beta$ のときは，これらは同じ式になるので，通常の隣接 2 項間漸化式として解くことができる．

$r \fallingdotseq 0$ のときは，一度階差をとることで定数 r を消去すれば上の方法が使える．なお，各係数の和が 0 となるとき，特性方程式の解 $x = \alpha, \beta$ のうち 1 つは必ず 1 になるので，

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = a_{n+1} - \alpha a_n = \cdots\cdots = a_2 - \alpha a_1$$

とすることができ，すぐに隣接 2 項間漸化式に帰着される．

✏注：a_{n+2} の係数が 1 以外の時も同様にして解くことができる．