問題 （'99　一橋大） 【難易度】 … 標準

曲線 $y=x^3+ax^2+b$ は直線 $l:y=-x+3$ と第 1 象限の点 P で交わり，P における曲線の接線と l は直交する．

（1） a の範囲を求めよ．

（2） b の範囲を求めよ．

【テーマ】：接線と法線

方針

点 P の x 座標を t とおいて，題意を満たすように式を作ります．

♣ ♠

解答

（1） $f(x)=x^3+ax^2+b$ とおき，点 P が直線 l 上にあるので，$\mathrm{P}(t,\ -t+3)$ とおく．このとき，点 P は第 1 象限にあることから $0<t<3$ である．

点 P における接線が直線 l と直交するので，点 P における接線の傾きは 1 となる．したがって，

$$f'(t)=1 \iff 3t^2+2at-1=0 \cdots\cdots ①$$

ここで，① が $0<t<3$ の間に実数解をもてばよい．$f(0)=-1<0$ であるから，$0<t<3$ の間に実数解をもつための条件は，

$$f(3)>0$$

ゆえに，

$$27+6a-1>0 \iff \boldsymbol{a>-\frac{13}{3}}\cdots\cdots(答)$$

（2） a が (1) の条件を満たせば，① は $0<t<3$ の間に実数解をもつ．これに加えて，曲線 $y=f(x)$ が点 P を通れば，題意の条件はすべて満たされるので，

$$t^3+at^2+b=-t+3 \iff t^3+at^2+t+b-3=0$$

ここで，① より，$at=\dfrac{1-3t^2}{2}$ であるから，

$$t^3+t\cdot\frac{1-3t^2}{2}+t+b-3=0$$
$$\therefore\ b=\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+3$$

$g(t)=\dfrac{1}{2}t^3-\dfrac{3}{2}t+3$ とおいて，$0<t<3$ において，$g(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．

$$g'(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}$$

であるから，$g'(t)=0$ のとき，$t=1$ ($\because$　$0<t<3$)．よって，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	2	↗	12

ゆえに，b のとり得る値は，$\boldsymbol{2\leqq b<12}\cdots\cdots$(答)

◇ ♡

解説

(1) で，l が点 P における曲線の法線になる条件から a の範囲を求め，(2) で，$y=f(x)$ と l が点 P で交わることから b の範囲を求めます．少し考えにくいかもしれませんが，b の範囲を出すときは，① で a を消去して t の式を作るところがポイントです．あとは，点 P が第 1 象限にあるという条件から t の範囲を求めておくことを忘れないようにしましょう．