問題 （'97　滋賀医科大） **【難易度】** … やや難

A, B, C を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

（1）　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)$

（2）　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$

（3）　$\sin A+\sin B+\sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$

（4）　三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすると，$R \geqq 2r$ であり，等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

【テーマ】：三角不等式の証明

方針

前問の結果を用いて示します．A, B, C は三角形の内角なので，$A+B+C=\pi$ が成り立ちます．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

題意より，$A+B+C=\pi$ …… ① が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{c}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号は，$A=B$ のとき成立する．よって，示された． **（証明終）**

（2）**【証明】**

$\sin\dfrac{C}{2}>0$ より，(1) で示した不等式の両辺に $\sin\dfrac{C}{2}>0$ をかけて，

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &\leqq \frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\\
&\leqq \frac{1}{8}\quad\left(\because\ 0<\sin\frac{C}{2}\leqq 1\right)
\end{aligned}
$$

等号は，(1) の等号成立条件である $A=B$ と $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$ すなわち $C=\dfrac{\pi}{3}$ を同時に満たす A, B, C すなわち

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

のとき成立する．よって，示された． **（証明終）**

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(3) **【証明】**

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\sin\{\pi-(B+C)\}+\sin B+\sin C\\&=\sin(B+C)+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&=2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\pi-A}{2}\times 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

と変形できる．(2) より，$1\geqq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&\geqq 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=4\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

等号は，(2) より，$A=B=C=\frac{\pi}{3}$ のとき，成立する．よって，示された． **(証明終)**

(4) **【証明】**

正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

であるから，面積を考えて，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2R\sin C\cdot 2R\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}r\cdot 2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$2R^2\sin A\sin B\sin C=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$2R\sin A\sin B\sin C=r(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\therefore\ \frac{2R}{r}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqq 4\quad(\because\ (3))$$

よって，$R\geqq 2r$ を得る．等号は，(3) より $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ のとき成立するので，正三角形のときである．
よって，示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

A, B, C が三角形の内角であることから，$A+B+C=\pi$ であることを利用することに気付かなければいけません．三角関数で扱う公式『和積の公式』の利用がポイントとなります．『和積の公式』は覚えていなくても構いませんが，加法定理を足したり引いたりすれば導けるので，自力で導けるようにはしておきましょう．

【和積の公式・積和の公式】

$$\begin{cases}\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\ \cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\end{cases}$$