問題 ('05　宮崎大)　　**【難易度】** … 標準

直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P, Q とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．

(1)　直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2)　曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3)　点 (x, y) が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$x + y$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むものとする．

【テーマ】：領域と最大・最小

方針

(1), (2) では，△PQR の面積の最大値を求めようとしています．(3) は，定番の $x + y = k$ とおいて k の最小値を求める問題です．

♣　♠

解答

(1)　l と C の交点の x 座標は

$$x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \iff 2x^2 - 5x = 0 \iff x(2x - 5) = 0$$

であるから，$x = 0,\ \dfrac{5}{2}$ となる．題意より，(P の x 座標) < (Q の x 座標) より，$\mathrm{P}(0, 1)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ である．次に，m の傾きは 1 であるから，m の方程式は $y = x + b$ とおける．これが C と接するので，

$$2x^2 - 4x + 1 = x + b \iff 2x^2 - 5x + 1 - b = 0$$

が重解をもてばよい．判別式を D とすると，

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - b) = 0 \iff 25 - 8 + 8b = 0 \qquad \therefore\ b = -\frac{17}{8}$$

よって，m の方程式は $y = x - \dfrac{17}{8}$ となる．ゆえに，点 P と直線 m との距離を d とすると，点と直線の距離の公式から，

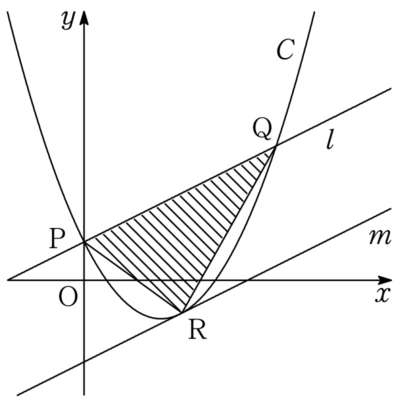
$$d = \frac{\left|-1 - \frac{17}{8}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{25}{8}}{\sqrt{2}} = \frac{25}{8\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{25\sqrt{2}}{16}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(2)　直線 l と直線 m は平行であるから，△PQR において，底辺を PQ，高さを d と考えればよい．

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PQ} \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{25\sqrt{2}}{16} \\ &= \boldsymbol{\frac{125}{32}} \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$



(3)　$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ となるので，この直線が題意の領域と交点をもつときの k の値の最小値を求めればよい．k が最小となるのは，$y=-x+k$ が曲線 C と接するときであるから，

$$2x^2-4x+1=-x+k \iff 2x^2-3x+1-k=0$$

が重解をもてばよい．判別式を D' とすると，

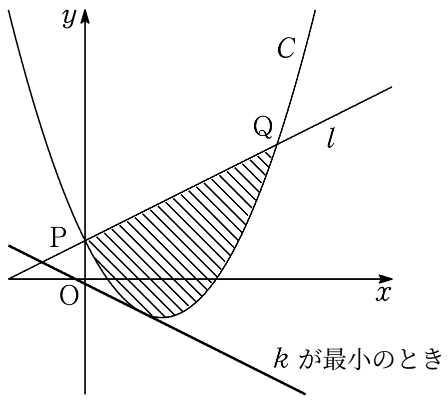
$$D'=(-3)^2-4\cdot2\cdot(1-k)=0$$

$$\iff 9-8+8k=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{8}$$

で，このとき重解は，$x=\dfrac{3}{4}$ となる．ゆえに，$y=-\dfrac{7}{8}$ である．

したがって，求める $x+y$ の最小値は，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{8}\quad\left(x=\frac{3}{4},\ y=-\frac{7}{8}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



◇　♡

解説

(1), (2) は三角形の面積の最大値を求める典型的な問題で，丁寧に誘導してくれているので完答を目指したい問題です．(3) もよく出題される問題なので，確実にできるようにしておきましょう．

(3) で，方程式の重解を求めていますが，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解は，$x=-\dfrac{b}{2a}$ であることは知っておきましょう．重解となるのは 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と接するときなので，頂点の x 座標が重解と一致することになるからです．重解をもつときの k の値を求めた後で，再び 2 次方程式に k を代入して解いていたのでは時間がかかってしまいますからこのような計算方法を知っておくことは大切なことです．ただし，k の値が本当に合っているかどうかは元の方程式に代入してちゃんと重解をもつかどうか調べることでわかるので，検算という意味で代入するのはよいでしょう．