問題 （'05　鹿児島大） 【難易度】 … 標準

次の問いに答えよ．

(1)　2 個の負でない実数 a, b に対して，$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ．

(2)　負でない実数 a, b, c について，$a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　n を 2 以上の整数とする．n 個の負でない実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ と負でない実数 c について，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \geqq c$ ならば，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

(1) 不等式を用いた通分を行うとすっきりと示せます．(1), (2) の流れを一般化して (3) を示します．

解答

(1) 【証明】

$a \geqq 0, b \geqq 0$ であるから，

$$\frac{a}{1+a} \geqq \frac{a}{1+a+b}\ ,\quad \frac{b}{1+b} \geqq \frac{b}{1+a+b}$$

辺々加えて，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b}$$

ゆえに，示された． （証明終）

(2) 【証明】

$a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ および $a+b \geqq c$ より，

$$\frac{a+b}{1+a+b}-\frac{c}{1+c} = \frac{a+b+(a+b)c-c(1+a+b)}{(1+a+b)(1+c)}$$

$$= \frac{a+b-c}{(1+a+b)(1+c)} \geqq 0$$

よって，

$$\frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c} \cdots\cdots ①$$

これと (1) の結果より，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つので，示された． （証明終）

(3) 【証明】

$i=1,2,\cdots\cdots,n$ とする．このとき，各 i に対して，$a_i \geqq 0$ であるから，

$$\frac{a_i}{1+a_i} \geqq \frac{a_i}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}$$

が成り立つので，$i=1,2,3,\cdots,n$ として辺々加えると，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n} \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ここで，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とおくと，$S_n \geqq c$ より，(2) で示した不等式 ① と同様にすれば，

$$\frac{S_n}{1+S_n} \geqq \frac{c}{1+c} \iff \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n} \geqq \frac{c}{1+c} \cdots\cdots ③$$

が成り立つので，②, ③ より，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が示された． （証明終）

◇ ♡

解説

(1) は，大きい方から小さい方を引いても示すことができますが，計算量が多くなります．本問は，分母に正の数を加えて不等式を用いて通分しているので，計算量が少なくすっきりとした証明ができます．

(2) は，大きい方から小さい方を引いて示し，(1) の結果とあわせることで証明ができます．

(3) は，(1), (2) で示したことをヒントに一般化する問題です．(1) でやった証明方法を用いないと難しいでしょう．(2) の結果を用いたいので，$S_n \geqq c$ を述べておくことが必須です．