

問題 ('12 神戸大)

【難易度】 … 標準

n を自然数とし、多項式 $P(x)$ を $P(x) = (x+1)(x+2)^n$ と定める。以下の間に答えよ。

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $(x+2)^n$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ。
- (3) $P(x)$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ。
- (4) $P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。

【テーマ】：整式の除法

方針

(1) は、剰余の定理を用います。(2) は、二項定理を用いれば余りが求められます。(3), (4) は前問の結果を用います。

解答

- (1) 剰余の定理より、求める余りは、

$$P(1) = 2 \cdot 3^n \dots \dots (\text{答})$$

である。

- (2) 二項定理より、

$$\begin{aligned} (x+2)^n &= {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} \cdot 2 + \dots + {}_n C_{n-2} x^2 \cdot 2^{n-2} + {}_n C_{n-1} x \cdot 2^{n-1} + {}_n C_n 2^n \\ &= x^2 ({}_n C_0 x^{n-2} + {}_n C_1 x^{n-3} \cdot 2 + \dots + {}_n C_{n-2} 2^{n-2}) + n \cdot 2^{n-1} x + 2^n \end{aligned}$$

ゆえに、 $(x+2)^n$ を x^2 で割った余りは、

$$n \cdot 2^{n-1} x + 2^n \dots \dots (\text{答})$$

- (3) (2) より、

$$(x+2)^n = x^2 Q_1(x) + n \cdot 2^{n-1} x + 2^n \dots \dots \textcircled{1}$$

とおける。両辺に $x+1$ をかけると、

$$(x+1)(x+2)^n = x^2(x+1)Q_1(x) + (n \cdot 2^{n-1} x + 2^n)(x+1)$$

$$P(x) = x^2(x+1)Q_1(x) + (n \cdot 2^{n-1} x + 2^n)(x+1)$$

$$= x^2(x+1)Q_1(x) + n \cdot 2^{n-1} x^2 + (n \cdot 2^{n-1} + 2^n)x + 2^n$$

$$= x^2 \{ (x+1)Q_1(x) + n \cdot 2^{n-1} \} + (n+2)2^{n-1} x + 2^n \dots \dots \textcircled{2}$$

よって、 $P(x)$ を x^2 で割った余りは、

$$(n+2)2^{n-1} x + 2^n \dots \dots (\text{答})$$

- (4) ②において、 $Q_2(x) = (x+1)Q_1(x) + n \cdot 2^{n-1}$ とおき、 $Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは、剰余の定理より、

$$Q_2(1) = 2Q_1(1) + n \cdot 2^{n-1}$$

である。一方、①より、 $x = 1$ を代入すると、

$$3^n = Q_1(1) + n \cdot 2^{n-1} + 2^n \iff Q_1(1) = 3^n - (n+2)2^{n-1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} Q_2(1) &= 2\{3^n - (n+2)2^{n-1}\} + n \cdot 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1} \end{aligned}$$

したがって、

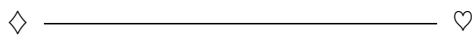
$$Q_2(x) = (x-1)Q_3(x) + 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}$$

と表せるので、②から、

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 \{(x-1)Q_3(x) + 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\} + (n+2)2^{n-1}x + 2^n \\ &= x^2(x-1)Q_3(x) + \{2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\}x^2 + (n+2)2^{n-1}x + 2^n \end{aligned}$$

ゆえに、 $P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りは、

$$\{2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\}x^2 + (n+2)2^{n-1}x + 2^n \dots \dots (\text{答})$$



解説

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの余りは、剰余の定理が使えます。2 次式以上で割るときは、商と余りを設定して式を作り、 x に適当な値を代入して余りを決定します。

(2) では、 $(x+2)^n$ を x^2 で割った余りを求めるので二項定理を用いましたが、次のように微分を利用して求めることができます。

別解

$(x+2)^n$ を x^2 で割ったときの商を $Q(x)$ とし、余りを $ax + b$ とすると、

$$(x+2)^n = x^2Q(x) + ax + b \dots \dots \textcircled{A}$$

となるので、 $x = 0$ を代入して、 $2^n = b$ を得る。また、 \textcircled{A} の両辺を x で微分すると、

$$n(x+2)^{n-1} = 2xQ(x) + x^2Q'(x) + a$$

であるから、 $x = 0$ を代入すると、 $n \cdot 2^{n-1} = a$ を得る。

ゆえに、求める余りは、 $n \cdot 2^{n-1}x + 2^n \dots \dots (\text{答})$

(割る式) = 0 が重解をもつタイプでは、微分が利用できます。理系の人は、数学 III で積の微分法を学習するので大丈夫だと思いますが、文系の人や理系でもまだ未学習の人は、次の積の微分の公式を知っておくと便利です。特に、文系の方は数学 III だから覚えなくていいだろうという意識をもつのではなく、本問のような問題が出たときに使える公式なので、必ず知っておきましょう。

【積の微分法】

u, v, w は x の関数であるとする。このとき、次の式が成り立つ。

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$