問題　（'06　東京農工大・改）　【難易度】 … やや難

2 つの三角形 $\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{BDC}$ があり，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=1$, $\mathrm{DA}=\sqrt{2}$ とする．$\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{BDC}$ の面積をそれぞれ S, T として，S^2+T^2 の値のとり得る範囲を求めよ．

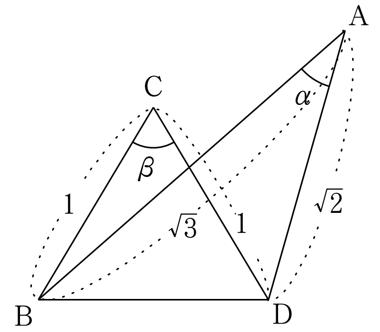
【テーマ】：平面図形の計量

方針

余弦定理を用いて S, T をそれぞれ求め，S^2+T^2 を計算します．三角形の成立条件が必要になるので，そこに気が付けるかどうかがポイントです．

♣　♠

解答



$\angle\mathrm{BAD}=\alpha$, $\angle\mathrm{BCD}=\beta$ とする．

$\triangle\mathrm{ABD}$ で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=3+2-2\sqrt{6}\cos\alpha=5-2\sqrt{6}\cos\alpha \cdots\cdots ①$$

$\triangle\mathrm{CBD}$ で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\beta=2-2\cos\beta \cdots\cdots ②$$

$\mathrm{BD}=x$ とすると，①, ② より，

$$\cos\alpha=\frac{5-x^2}{2\sqrt{6}},\ \cos\beta=\frac{2-x^2}{2}$$

となる．一方，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\alpha$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\beta$$

であることから，

$$\begin{aligned}
S^2+T^2&=\frac{6}{4}\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\beta\\
&=\frac{3}{2}(1-\cos^2\alpha)+\frac{1}{4}(1-\cos^2\beta)\\
&=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{5-x^2}{2\sqrt{6}}\right)^2\right\}+\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{2-x^2}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{3}{2}\left(1-\frac{25-10x^2+x^4}{24}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{4-4x^2+x^4}{4}\right)\\
&=\frac{3}{2}\cdot\frac{-x^4+10x^2-1}{24}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-x^4+4x^2}{4}\\
&=\frac{1}{16}(-2x^4+14x^2-1)\\
&=-\frac{1}{8}\left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{47}{32}
\end{aligned}$$

ここで，x のとり得る値の範囲を考えよう．三角形の成立条件より，

$$\begin{cases}\sqrt{3}-\sqrt{2}<x<\sqrt{3}+\sqrt{2} & \cdots\cdots ③\\ 0<x<2 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

よって，③, ④ を同時に満たす x の値の範囲は，$\sqrt{3}-\sqrt{2}<x<2$ である．ゆえに，$5-2\sqrt{6}<x^2<4$ であるから，

$x^2=t$, $S^2+T^2=f(t)$ とおくと，

$$f(t)=-\frac{1}{8}\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{47}{32}\quad (5-2\sqrt{6}<t<4)$$

となるので，$f(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．

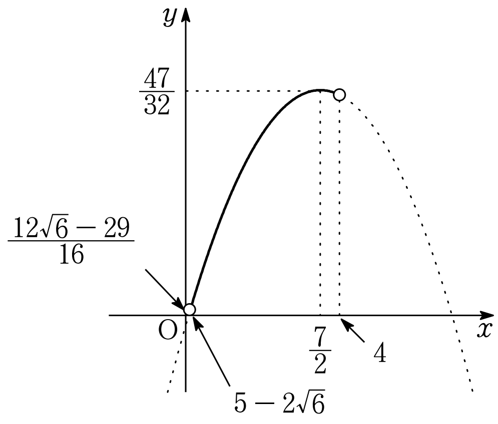
$$f(5-2\sqrt{6})=-\frac{1}{8}\left(5-2\sqrt{6}-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{47}{32}$$
$$=\frac{12\sqrt{6}-29}{16}$$

であるから，

$$\frac{12\sqrt{6}-29}{16}<f(t)\leqq\frac{47}{32}$$

となる．ゆえに，S^2+T^2 のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{12\sqrt{6}-29}{16}<S^2+T^2\leqq\frac{47}{32}}\cdots\cdots(答)$$



◇ ♡

解説

BD $=x$ とおいて，三角形の面積を x で表すことがポイントになります．また，x のとり得る値の範囲を三角形の成立条件から導かなければならないので，この点にも注意を払いましょう．答えがやや複雑な形になるので，計算間違いをしないよう慎重に計算しましょう．答えがいつも簡単になると思ったら大間違いです．入試問題の中には，本当にこんな複雑な答えになるの？っていう問題が結構あります．答えの形に惑わされないよう，確信を持って計算できるようになりましょう．