問題 （'82　東京大）　【難易度】 … 標準

xy 平面において，点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き，点 B は x 軸上を動く．ただし，線分 AB の長さは 1 であり，線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする．

(1)　$\theta = \angle \mathrm{AOB}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　BC の長さを θ で表せ．

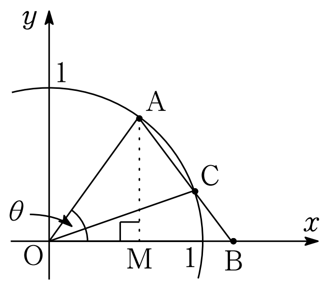
(3)　線分 OB の中点を M とするとき，線分 CM の長さの範囲を求めよ．

【テーマ】：平面図形の計量

方針

(1) は，線分 OB の中点を考えてみましょう．(2) は，△AOB と △OAC が二等辺三角形になっていることに注意を向けます．(3) は余弦定理を用います．

解答



(1)　題意から，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ である．線分 OB の中点を M とすると，△AOB は OA = AB の二等辺三角形であるから，AM ⊥ OB である．また，$\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta)$ であることから，$\mathrm{M}(\cos\theta, 0)$ となる．線分 AB が円周と交点をもつためには，OB > 1 でなければならないので，

$$\mathrm{OM} > \frac{1}{2} \iff \cos\theta > \frac{1}{2} \iff 0^\circ < \theta < 60^\circ \cdots\cdots ①$$

となる．また，$\angle\mathrm{OAC} = 180^\circ - 2\theta$ であり，線分 AB が円周と交点をもつためには，$\angle\mathrm{OAC} < 90^\circ$ でなければならないので，

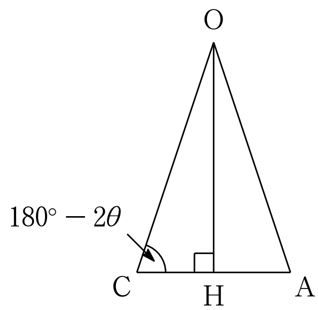
$$180^\circ - 2\theta < 90^\circ \iff 2\theta > 90^\circ \iff \theta > 45^\circ \cdots\cdots ②$$

よって，①, ② より，θ のとり得る値の範囲は，

$\boldsymbol{45^\circ < \theta < 60^\circ}$……(答)

(2)　△OAC は二等辺三角形であり，$\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OAC} = 180^\circ - 2\theta$ であるから，線分 AC の中点を H とすると，

$$\mathrm{AC} = 2\mathrm{CH} = 2\mathrm{OC}\cos(180^\circ - 2\theta) = -2\cos 2\theta$$



である．よって，

$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} - \mathrm{AC} = \boldsymbol{1 + 2\cos 2\theta}$……(答)

(3)　点 $\mathrm{M}(\cos\theta, 0)$, $\mathrm{B}(2\cos\theta, 0)$ であるから，

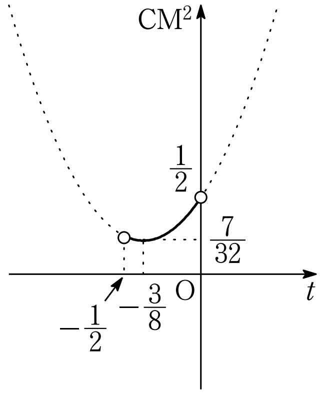
$$\mathrm{BM} = \cos\theta,\ \mathrm{BC} = 1 + 2\cos 2\theta,\ \angle\mathrm{CBM} = \theta$$

であるから，△BCM で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \\ &= (1 + 2\cos 2\theta)^2 + \cos^2\theta - 2(1 + 2\cos 2\theta)\cos^2\theta \\ &= (1 + 2\cos 2\theta)^2 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2(1 + 2\cos 2\theta)\cdot\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\end{aligned}$$

ここで，$\cos 2\theta = t$ とおくと，(1) から，$90^\circ < 2\theta < 120^\circ$ であるから，$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}^2 &= (1+2t)^2 + \frac{1+t}{2} - 2(1+2t)\cdot\frac{1+t}{2}\\ &= 1 + 4t + 4t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - 1 - 3t - 2t^2\\ &= 2t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\\ &= 2\left(t + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{32}\end{aligned}$$



$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ より，右図から

$$\frac{7}{32} \leqq \mathrm{CM}^2 < \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \frac{\sqrt{14}}{8} \leqq \mathrm{CM} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

を得る．ゆえに，線分 CM の長さの範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{8} \leqq \mathrm{CM} < \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdots\cdots(答)$$

◇ ♡

解説

(1) は，答えの予想はつくかもしれないが，記述するのがやや難しく感じるかもしれません．別解として，直線 AB の方程式を求め，円 $x^2 + y^2 = 1$ との交点の y 座標の値を求めることから θ のとり得る値を求める方法もあります．

(2) は二等辺三角形の性質をうまく利用します．余弦定理を用いてもできますが，解答のような解き方も大切な考え方なので，余弦定理でやった人は，別解という意味でも解き方を知っておいて下さい．

(3) は，余弦定理を用いて CM^2 を求めます．$\cos 2\theta = t$ とおいて，t の 2 次関数に帰着させるのがポイントですが，

置き換えしたら範囲変更

を忘れないようにしましょう．