問題 （'04　同志社大・改） 【難易度】 … 標準

方程式 $kx^2-2(k+2)x+3k+2=0\ (k\neq 0)$ の解について次の各問いに答えよ．

（1） 異なる 2 つの正の解をもつ k の範囲を求めよ．

（2） 異なる 2 つの負の解をもつ k の範囲を求めよ．

（3） 正負の解を 1 つずつもつ k の範囲を求めよ．

【テーマ】：解の配置問題

方針

2 次の係数に文字があるので，この文字が正か負かで場合分けをする必要がありますが，$k\neq 0$ という条件をうまく使い，両辺を k で割ることで，場合分けを避けることができます．あとは，左辺を $f(x)$ とおいて $f(x)$ と x 軸の関係を用います．また，解と係数の関係を用いる方法もあります．ただし，実数解をもつ条件を忘れないようにしましょう．

方程式の解は，左辺を $f(x)$ とおいて $f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標と一致すると考えます．このことは非常に大切なことでここが理解できていなければ他の分野にも大きく影響してしまいます．

♣ ♠

解答

（1） $k\neq 0$ より，

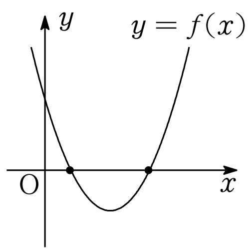
$$x^2-\frac{2(k+2)}{k}x+\frac{3k+2}{k}=0$$

である．ここで，この式の左辺を $f(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-\frac{2(k+2)}{k}x+\frac{3k+2}{k} \\ &= \left(x-\frac{k+2}{k}\right)^2-\frac{(k+2)^2}{k^2}+\frac{3k+2}{k} \\ &= \left(x-\frac{k+2}{k}\right)^2+\frac{2k^2-2k-4}{k^2} \end{aligned}$$

より，軸の方程式は $x=\dfrac{k+2}{k}$，頂点の座標は $\left(\dfrac{k+2}{k},\ \dfrac{2k^2-2k-4}{k^2}\right)$ である．

題意をみたすためには，



（ i ） $f(0)>0 \iff \dfrac{3k+2}{k}>0$

（ ii ） $\dfrac{k+2}{k}>0$

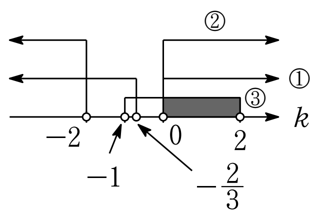
（iii） $\dfrac{2k^2-2k-4}{k^2}<0 \iff k^2-k-2<0$

をすべてみたせばよい．

（ i ） $\iff k(3k+2)>0 \quad \therefore\ k<-\dfrac{2}{3},\ 0<k$ ……①

（ ii ） $\iff k(k+2)>0 \quad \therefore\ k<-2,\ 0<k$ ……②

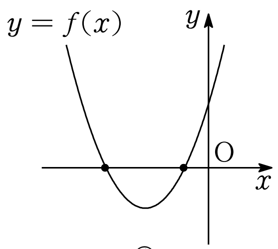
（iii） $\iff (k-2)(k+1)<0 \quad \therefore\ -1<k<2$ ……③



となる．①〜③ より，求める k の値の範囲は，

$\boldsymbol{0<k<2}$……(答)

(2) 題意をみたすためには，

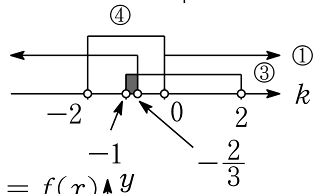


(ｉ) $f(0)>0$

(ii) $\dfrac{k+2}{k}<0$

(iii) $\dfrac{2k^2-2k-4}{k^2}<0$

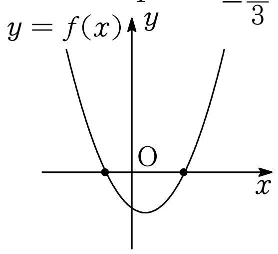
をすべてみたせばよい．(ｉ), (iii) は (1) と同じである．



(ii) より，$k(k+2)<0$ $\quad\therefore\quad -2<k<0$ ……④

となる．①, ③, ④ より，求める k の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-1<k<-\frac{2}{3}}\text{……(答)}$$



(3) 題意をみたすためには，$f(0)<0$ をみたせばよい．よって，

$$\frac{3k+2}{k}<0 \iff k(3k+2)<0 \quad\therefore\quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}<k<0}\text{……(答)}$$

別解

解と係数の関係を用いた解法もあります．

与えられた方程式の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=\frac{2(k+2)}{k},\ \alpha\beta=\frac{3k+2}{k}$$

であり，与えられた方程式の判別式を D とすると，$D>0$ であることから，

$$D/4=(k+2)^2-k(3k+2)>0 \iff -1<k<2$$

(1) $\alpha>0,\ \beta>0$ であるから，$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$．よって，

$$\frac{2(k+2)}{k}>0 \iff k<-2,\ 0<k \ ,\quad \frac{3k+2}{k}>0 \iff k<-\frac{2}{3},\ 0<k$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{0<k<2}\text{……(答)}$$

(2) $\alpha<0,\ \beta<0$ であるから，$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$．よって，

$$\frac{2(k+2)}{k}<0 \iff -2<k<0 \ ,\quad \frac{3k+2}{k}>0 \iff k<-\frac{2}{3},\ 0<k$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1<k<-\frac{2}{3}}\text{……(答)}$$

(3) $\alpha\beta<0$ であればよいので，

$$\frac{3k+2}{k}<0 \iff \boldsymbol{-\frac{2}{3}<k<0}\text{……(答)}$$

◇ ♡

解説

この問題は，解の配置問題と呼ばれる問題で，様々な解法があります．本解は，グラフを用いた解法を用いましたが，**別解** で取り上げているように，解と係数の関係を用いた解法もあります．どちらの方法も知っておく必要があるので，状況に応じて使い分けられるようにしておくとよいでしょう．また，解答中で用いている

$$\frac{k+2}{k}>0 \iff k(k+2)>0$$

のような式変形は，両辺に分母の 2 乗の式 (k^2) をかけて得られます．そのまま両辺に k をかけると k の符号で場合分けをする必要がありますが，2 乗すれば正となるので，場合分けをする必要がありません．つまり，場合分けを避けるための計算手法です．必ず知っておきましょう．