問題（'00　茨城大） **【難易度】**… 標準

不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq ax(y-z)$ がすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して成り立つように，実数 a の範囲を定めよ．

【テーマ】：絶対不等式

方針

絶対不等式の問題です．変数が 3 つもあるので，1 つの文字に着目して後の文字は定数とみなして処理していくのが鉄則です．それを何度か繰り返せば a の値の範囲が決定します．

すべての文字が 2 次なので，1 つの文字についての 2 次不等式と見ることが重要です．それさえ見えてくればあとは 2 次不等式のところで学んだことが生かされるはずです．

♣ ♠

解答

与式を x の不等式と見なして変形すると，

$$x^2-a(y-z)x+y^2+z^2 \geqq 0$$

これがすべての実数 x に対して成り立つための条件は，
$x^2-a(y-z)x+y^2+z^2=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=a^2(y-z)^2-4(y^2+z^2) \geqq 0$$

となることである．さらに，この不等式を y に関する不等式とみなして変形すると，

$$(4-a^2)y^2+2a^2yz+(4-a^2)z^2 \geqq 0 \cdots\cdots①$$

となるので，これがすべての実数 y に関して成り立つためには，
（ i ） $a=\pm 2$ のとき，$8yz \geqq 0$ となるので，不適．
（ii） $a \fallingdotseq \pm 2$ のとき，すべての実数 y に対して ① が成り立つための必要十分条件は，
$(4-a^2)y^2+2a^2yz+(4-a^2)z^2=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$D_2/4=a^4z^2-(4-a^2)^2z^2 \leqq 0 \text{ かつ } 4-a^2 \geqq 0$$

である．すなわち，

$$z^2\{a^4-(4-a^2)^2\} \leqq 0 \text{ かつ } -2 \leqq a \leqq 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 8z^2(a^2-2) \leqq 0 \text{ かつ } -2 \leqq a \leqq 2$$

これがすべての実数 z に対して成り立てばよいので，

$$a^2-2 \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

♢ ♡

解説

はじめの処理（x の 2 次不等式が常に成り立つ条件）は基本であるからできなければいけないが，y の 2 次不等式とみるときは 2 次の係数に文字を含むので場合わけが必要になってくる．これを忘れてしまうと大幅に減点されることを覚悟しなくてはいけない．このような文字の処理が正確にできるようになっておかなければ部分点を稼ぐことはできない．日頃から文字に対する警戒心を持つように心がけよう．