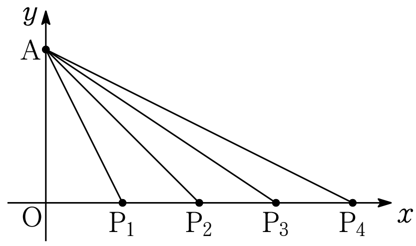
問題 ('06　首都大学東京)　【難易度】… やや難

図のような座標平面上の点 A$(0,1)$, O$(0,0)$, $\mathrm{P}_n(n,0)$ (n は自然数) に対して，$\theta_n=\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O}$ とおく．以下の問いに答えなさい．



(1)　$\tan(\theta_m+\theta_n)=1$, $m\leqq n$ となる自然数の組 (m,n) をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい．

(2)　$\tan(\theta_l+\theta_m+\theta_n)=1$, $l\leqq m\leqq n$ となる自然数の組 (l,m,n) をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい．

【テーマ】：整数問題（不定方程式・絞込み）

方針

(1) は，傾きと tan の関係を用いて，加法定理を利用し不定方程式を導き出します．(2) は，文字が 3 つあるので，不定方程式を求めた後で絞込みを行う必要があります．一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に注意して絞り込みます．

解答

(1)　直線 AP_n の傾きは $-\dfrac{1}{n}$ であるから，

$$\tan(\pi-\theta_n)=-\frac{1}{n}\iff -\tan\theta_n=-\frac{1}{n}\iff \tan\theta_n=\frac{1}{n}$$

よって，加法定理から

$$\begin{aligned}\tan(\theta_m+\theta_n)=1&\iff \frac{\tan\theta_m+\tan\theta_n}{1-\tan\theta_m\tan\theta_n}=1\\&\iff \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{mn}}=1\\&\iff \frac{m+n}{mn-1}=1\\&\iff mn-1=n+m\\&\iff (m-1)(n-1)=2\end{aligned}$$

m,n は自然数より，$m-1\geqq 0$, $n-1\geqq 0$ で，$m\leqq n$ より，かけて 2 となる組合せは

$$(m-1,n-1)=(1,2)\iff \boldsymbol{(m,n)=(2,3)}\cdots\cdots(答)$$

(2)　(1) と同様に考えて，

$$\begin{aligned}\tan(\theta_l+\theta_m+\theta_n)=1&\iff \frac{\tan(\theta_l+\theta_m)+\tan\theta_n}{1-\tan(\theta_l+\theta_m)\tan\theta_n}=1\quad(☜\ \theta_l+\theta_m\ を一塊と見て変形)\\&\iff \frac{\frac{l+m}{lm-1}+\frac{1}{n}}{1-\frac{l+m}{lm-1}\cdot\frac{1}{n}}=1\quad(\because\ (1))\\&\iff \frac{nl+mn+lm-1}{n(lm-1)-l-m}=1\\&\iff nl+mn+lm-1=mnl-n-m-l\\&\iff mnl+1=l+m+n+lm+mn+nl\quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

両辺を $lmn \neq 0$ で割ると，

$$1 + \frac{1}{lmn} = \frac{1}{mn} + \frac{1}{lm} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

となる．次に，$l \geqq 4$ とすると，$l \leqq m \leqq n$ であることから，$m \geqq 4$, $n \geqq 4$ となり，

$$\frac{1}{mn} + \frac{1}{lm} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{4 \cdot 4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 3 < 1$$

となり，(左辺) > 1 であることと矛盾するので不適．ゆえに，$l \leqq 3$ である．

（ｉ） $l = 1$ のとき，① より，

$0 = 2m + 2n$ となるので，これをみたす自然数 m, n は存在しないので不適．

（ii） $l = 2$ のとき，① より，

$mn - 3m - 3n = 1$ となるので，$(m-3)(n-3) = 10$

であり，$2 \leqq m \leqq n$ であることから，

$$(m-3, n-3) = (1, 10), (2, 5) \iff (m, n) = (4, 13), (5, 8)$$

（iii） $l = 3$ のとき，① より，

$mn - 2m - 2n = 1$ となるので，$(m-2)(n-2) = 5$

であり，$3 \leqq m \leqq n$ であることから，

$$(m-2, n-2) = (1, 5) \iff (m, n) = (3, 7)$$

以上より，求める l, m, n の組は，

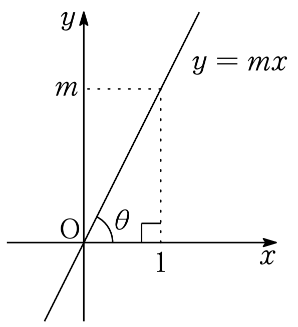
$\boldsymbol{(l, m, n) = (2, 4, 13), (2, 5, 8), (3, 3, 7)}$……(答)

◇　♡

解説

(1) は加法定理を用いて計算すれば，不定方程式が導き出されます．(2) も同様にして l, m, n の式が出せますが，文字が 3 つあるので，(1) のように式変形して解くのは困難です．そこで，一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に着目して，値を絞り込みましょう．

《傾きと tan の関係》



$\boldsymbol{m = \tan\theta}$

《tan の加法定理》

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

（複号同順）