問題 ('01　千葉大) **【難易度】** … 標準

自然数 $x,\, y$ を用いて $p^2 = x^3 + y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ．また，このときの $x,\, y$ をすべて求めよ．

【テーマ】：素数問題

方針

因数分解をして，素数の性質を利用します．

ある自然数の約数が 1 とそれ自身しかないとき，その自然数を素数といいます．この素数の性質を利用して解く問題です．すなわち $a,\, b$ が自然数で，p が素数であるとき，

$$p = a \times b$$

と表されるならば，$(a,\, b) = (1,\, p)$ または $(p,\, 1)$ の 2 通りしか考えられません．また，

$$p^2 = a \times b$$

と表されるならば，$(a,\, b) = (1,\, p^2)$ または $(p,\, p)$ または $(p^2,\, 1)$ の 3 通りしか考えられません．本問ではこれを利用します．

♣ ♠

解答

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ であるから，

$$p^2 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

ここで，$x,\, y$ は自然数であることから，$x + y > 1$ となるので，p が素数であることより，

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x + y = p \\ x^2 - xy + y^2 = p \end{cases} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{cases} x + y = p^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

である．

(i) のとき，

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = p \quad &\iff \quad (x+y)^2 - 3xy = p \\ &\iff \quad p^2 - 3xy = p \\ &\iff \quad xy = \frac{p^2 - p}{3} \end{aligned}$$

よって，解と係数の関係から，$x,\, y$ は次の 2 次方程式の解となる．

$$t^2 - pt + \frac{p^2 - p}{3} = 0 \quad \iff \quad 3t^2 - 3pt + p^2 - p = 0$$

$x,\, y$ は自然数であることから，判別式を D_1 とすると，

$$D_1 = 9p^2 - 4 \cdot 3 \cdot (p^2 - p) \geqq 0 \quad \iff \quad p(p-4) \leqq 0 \quad \iff \quad 0 \leqq p \leqq 4$$

p は素数であるから，$p = 2,\, 3$ である．

$p = 2$ のとき，

$$3t^2 - 6t + 2 = 0 \text{ より，} t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

となるので不適．

$p=3$ のとき,

$$3t^2-9t+6=0 \iff (t-1)(t-2)=0$$

となるので, $t=1, 2$ であり, これは題意をみたす.
（ii）のとき,

$$\begin{aligned} x^2-xy+y^2=1 &\iff (x+y)^2-3xy=1 \\ &\iff p^4-3xy=1 \\ &\iff xy=\frac{p^4-1}{3} \end{aligned}$$

よって, 解と係数の関係から, x, y は次の 2 次方程式の解となる.

$$t^2-p^2t+\frac{p^4-1}{3}=0 \iff 3t^2-3p^2t+p^4-1=0$$

x, y は自然数であることから, 判別式を D_2 とすると,

$$D_2=9p^4-4\cdot 3\cdot(p^4-1) \geqq 0 \iff p^4-4 \leqq 0 \iff 0 \leqq p^2 \leqq 2$$

p は素数であるから, これをみたす p は存在しない. ゆえに, 求める素数 p と x, y は,

$$\boldsymbol{p=3,\ (x, y)=(1, 2),\ (2, 1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

素数に関する問題を解くためには, 素数の性質をしっかりと理解しておく必要があります. 本問は, 因数分解をして解くという意味では不定方程式の因数分解型に非常によく似ていますが, p の値がわからないので, どのようにして p の値を絞り込むかという部分が難しいでしょう. $x+y, xy$ を p を用いて表すことができたなら解と係数の関係を思い出して, 自然数である x, y が存在するための p の条件を導き出しましょう. この考え方は, 通過領域の問題などにも出てくるので, 様々な場面で使う解法手段ですから, しっかりと身につけておきましょう.
ここで, 次のような疑問を持つ人がいるかもしれません.

x, y は自然数なのに何で判別式をとるの？

実際に, よく受ける質問です. ここで重要なのは, 最低限必要な条件を求めなければならないということです. 自然数は実数の一部であるという認識が必要になります. つまり, x, y が自然数なら t の 2 次方程式は実数解をもたなければならないということです. もちろんこれは必要条件にすぎません. ですから, そのあとで十分性を確認するため, $p=2, 3$ のときで題意をみたすかどうかを調べているのです.