2021 年度　東海大学　B 日程理系　第３問

問題　関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$（$x \geqq 0$）を以下で定める。

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+2},\ f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える。

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし，$a_1 = 3$，$b_1 = 2$ とする。

(1)　$a_2 =$ $\boxed{\text{ア}}$，$b_2 =$ $\boxed{\text{イ}}$，$a_3 =$ $\boxed{\text{ウ}}$，$b_3 =$ $\boxed{\text{エ}}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす。

(a)　$a_{n+2} =$ $\boxed{\text{オ}}$ $a_{n+1} +$ $\boxed{\text{カ}}$ a_n

(b)　$b_{n+2} =$ $\boxed{\text{キ}}$ $b_{n+1} +$ $\boxed{\text{ク}}$ b_n　　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3)　(2) の (a) は次のように変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このときの α，β の値はそれぞれ $\alpha =$ $\boxed{\text{ケ}}$，$\beta =$ $\boxed{\text{コ}}$ である。ただし，$\alpha > \beta$ とする。

$c_n = a_{n+1} - \alpha a_n$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n =$ $\boxed{\text{サ}}$ β^{n-1} である。

したがって，a_n の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{シ}}\,\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ス}}\,\beta^{n-1}$$

である。また，$\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = \boxed{\text{セ}}\,\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ソ}}\,\beta^{n-1}$$

である。ただし，$\boxed{\text{サ}}$〜$\boxed{\text{ソ}}$ は α，β を用いないで答えよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(0) =$ $\boxed{\text{タ}}$

S_toukai2021B_03.pbm