

2021年度 東海大学 B日程理系 第3問

問題 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots (x \geq 0)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+2}, f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える。

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし、 $a_1 = 3, b_1 = 2$ とする。

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $b_2 = \boxed{\text{イ}}$, $a_3 = \boxed{\text{ウ}}$, $b_3 = \boxed{\text{エ}}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす。

(a) $a_{n+2} = \boxed{\text{オ}} a_{n+1} + \boxed{\text{カ}} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(b) $b_{n+2} = \boxed{\text{キ}} b_{n+1} + \boxed{\text{ク}} b_n$

(3) (2) の (a) は次のように変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このときの α, β の値はそれぞれ $\alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\beta = \boxed{\text{コ}}$ である。ただし、 $\alpha > \beta$ とする。

$c_n = a_{n+1} - \alpha a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とおくと、数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\text{サ}} \beta^{n-1}$ である。

したがって、 a_n の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{シ}} \alpha^{n-1} + \boxed{\text{ス}} \beta^{n-1}$$

である。また、 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = \boxed{\text{セ}} \alpha^{n-1} + \boxed{\text{ソ}} \beta^{n-1}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{サ}} \sim \boxed{\text{ソ}}$ は α, β を用いないで答えよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \boxed{\text{タ}}$