

2021年度 東海大学 A日程理系 第3問

**問題** 区間  $0 \leq x \leq 1$  において定義された2つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  に対して

$$I_n(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left( g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。

(1)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$  のとき,

$$\begin{aligned} I_n(x^2, x^3) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left( \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \left( \boxed{\text{ア}} k^4 + \boxed{\text{イ}} k^3 + \boxed{\text{ウ}} k^2 \right) \end{aligned}$$

と表されるので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, x^3) = \boxed{\text{エ}}$  である。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\sin \pi x, x^2) = \boxed{\text{オ}}$

(3) 区間  $0 \leq x \leq 1$  において, 次の3つの関数  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$ ,  $h_3(x)$  を考える。

$$h_1(x) = x - x^2, \quad h_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad h_3(x) = x$$

(i)  $h_1(x) - h_2(x)$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最大値は  $\boxed{\text{カ}}$  であり, 最小値は  $\boxed{\text{キ}}$  である。

(ii)  $h_2(x) - h_3(x)$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最大値は  $\boxed{\text{ク}}$  であり, 最小値は  $\boxed{\text{ケ}}$  である。

(iii)  $I_n(x^2, e^x)$  を  $h_2(x)$  を用いて表すと,

$$I_n(x^2, e^x) = \sum_{k=1}^n \boxed{\text{コ}} h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。

(i), (ii), (iii) を利用すると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, e^x) = \boxed{\text{サ}}$  である。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{I_n(x^2, e^x) + I_n(e^x, x^2)\} = \boxed{\text{シ}}$$