

2023 年度 東北医科薬科大学 前期理系 第 1 問

問題 座標平面上でサイクロイド $C: x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考える。 C 上の点 $P(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 < t < 2\pi$) における接線および法線をそれぞれ ℓ_t, L_t で表す。また、 ℓ_t と x 軸の交点を A, L_t と x 軸の交点を B, 線分 PB の中点を Q とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) L_t の傾きを t を用いて表すと $\boxed{\text{ア}} \tan \frac{t}{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

(2) $t = \frac{4}{3}\pi$ のとき、3 点 A, B, Q の座標は、

$$A\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}, 0\right), B\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi, 0\right),$$

$$Q\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。

(3) t が $0 < t < 2\pi$ を動くとき、点 Q が描く軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi$ である。この図形を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を $V = a\pi^b$ と整数 a, b を用いて表すとき、 $a = \boxed{\text{チ}}$, $b = \boxed{\text{ツ}}$ となる。