

問題 複数の玉が入った袋から玉を1個取り出して袋に戻す事象を考える。どの玉も同じ確率で取り出されるものとし、 n を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1) 袋の中に赤玉1個と黒玉2個が入っている。この袋の中から玉を1個取り出し、取り出した玉と同じ色の玉をひとつ加え、合計2個の玉を袋に戻すという試行を繰り返す。 n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を p_n とすると、次式が成り立つ。

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

- (2) 袋の中に赤玉3個と黒玉2個が入っている。この袋の中から玉を1個取り出し、赤玉と黒玉を1個ずつ、合計2個の玉を袋に戻す試行を繰り返す。 n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を P_n とすると、次式が成り立つ。

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}, P_3 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

n 回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数 M_n は $M_n = n + \boxed{\text{ス}}$ であり、この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数 R_n は $R_n = M_n \times P_n$ と表される。 n 回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ、試行後の赤玉の個数が試行前と比べて $\boxed{\text{セ}}$ 個増えるため、 $n+1$ 回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は $R_{n+1} = R_n + (1 - P_n) \times \boxed{\text{セ}}$ となる。したがって、

$$P_{n+1} = \frac{n + \boxed{\text{ソ}}}{n + \boxed{\text{タ}}} \times P_n + \frac{1}{n + \boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ。このことから、

$$(n+3) \times \left(n + \boxed{\text{ツ}} \right) \times \left(P_n - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \right)$$

が n に依らず一定となることがわかり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

と求められる。