

2019年度 杏林大学 前期理系 第4問

問題 x, y を正の実数, $f(x)$ を恒等的に 0 ではない微分可能な連続関数とし, $f'(x)$ はその導関数を表すものとする。

(a) 下記の 6 つの命題が, 任意の正の実数 x, y に対して真となるように, $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$ の解答として適当なものを, 解答群の中からすべて選べ。

・ $f(x) = \boxed{\text{ア}} \implies f(x+y) = f(x) \times f(y)$

・ $f(x) = \boxed{\text{イ}} \implies f(x \times y) = f(x) + f(y)$

・ $f(x) = \boxed{\text{ウ}} \implies \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = f(2x)$

・ $f(x) = \boxed{\text{エ}} \implies f(f(x)) + f(x) = 0$

・ $f(x) = \boxed{\text{オ}} \implies \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$

・ $f(x) = \boxed{\text{カ}} \implies 3f(x) + f'(x) = 0$

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$ の解答群

① $3x+5$ ② $-x$ ③ $4x^2+1$ ④ $\frac{1}{x+8}$ ⑤ $6 \log_2 x$

⑥ $\sin x$ ⑦ $\cos x$ ⑧ e^{-3x} ⑨ $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

(b) 設問 (a) で示した 6 つの命題のうち, 上記解答群に挙げた関数に代えて,

$$f(x) = c \quad (\text{ただし, } c \text{ は } 0 \text{ でない適当な定数})$$

とすると真となる命題は $\boxed{\text{キ}}$ 個存在する。また, 設問 (a) で選んだ関数に対し, 逆も真となる命題の数は $\boxed{\text{ク}}$ 個である。

(c) $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立ち, $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{\text{コ}}$$

が成り立つ。