2024 年度　久留米大学　推薦理系　第 5 問

問題　先生と久米さんの二人の会話文を読み，次の問いに答えよ。

〔問題 1〕　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。

> 久米：これは第 k 項を差の形に変形することで和が求められる問題ですね。まず，a を定数として，$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$ の形に変形するといいんですよね？
>
> 先生：そうですね。
>
> 久米：そして，$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$ の式に $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入して，辺々を加えることで
>
> 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ が求められます。
>
> 先生：では，和を求めてみましょう。

(1)　a の値は，$a = \boxed{㉓}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \boxed{㉔}$$

である。ただし，$\boxed{㉔}$ には $\dfrac{n}{\boxed{}\,n + \boxed{}}$ の $\boxed{}$ に値を埋める形で答えよ。

〔問題 2〕　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 3^k$ を求めよ。

> 久米：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 3^k$ は，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 3^k$ とおき，$S_n - rS_n$ を計算して，S_n を求めます。
>
> 先生：そのとおりです！よく勉強していますね。では，今回は別の方法でこの和を求めてみましょう。
>
> 久米：はい。では，どのようにして解くのか，教えてください。
>
> 先生：〔問題 1〕で教えたように $(k+1)\cdot 3^k$ を「2 数の差の形」で表すことを考えてみましょう。
>
> 久米：2 数の差の形？〔問題 1〕の場合はわかりますが，この場合はちょっとわかりません …。
>
> 先生：難しかったですか？では，この問題の変形を教えます。ただし，あとの問題はこの変形を参考にして，考えてみましょう。
>
> 久米：はい。この場合の変形を理解して，次からの問題で利用します。
>
> 先生：では，この場合は，$(k+1)\cdot 3^k = \{s(k+1)+t\}\cdot 3^k - (sk+t)\cdot 3^k$ となるような s，t の値を求めます。わかりますか？この変形ができれば，〔問題 1〕と同じように考えて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 3^k$ を求めることができます。
>
> 久米：やってみます！

(2)　s，t の値は，$s = \boxed{㉕}$，$t = \boxed{㉖}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 3^k = \boxed{㉗}$$

である。ただし，$\boxed{㉗}$ には $\dfrac{\left(2n+\boxed{}\right)\cdot 3^{n+\boxed{}}-\boxed{}}{\boxed{}}$ の $\boxed{}$ に値を埋める形で答えよ。

〔問題 3〕　和 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)\cdot 3^k$ を求めよ。

久米： この問題も〔問題 2〕で教えてもらった考え方でできますか？ 先生： できます。しっかりと考えてみましょう！ 久米： はい！やってみます！

(3)　$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)\cdot 3^k=\boxed{㉘}$ である。

ただし，$\boxed{㉘}$ には $\dfrac{\left(2n^2+\boxed{}\right)\cdot 3^{n+\boxed{}}-\boxed{}}{\boxed{}}$ の $\boxed{}$ に値を埋める形で答えよ。

〔問題 4〕　和 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{3k+5}{(3k-1)(3k+2)\cdot 2^{k+1}}$ を求めよ。

(4)　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{3k+5}{(3k-1)(3k+2)\cdot 2^{k+1}}=\boxed{㉙}$ である。

ただし，$\boxed{㉙}$ には $\dfrac{\left(3n+\boxed{}\right)\cdot 2^{n-\boxed{}}-\boxed{}}{\left(3n+\boxed{}\right)\cdot 2^{n+\boxed{}}}$ の $\boxed{}$ に値を埋める形で答えよ。