

**問題** 先生と大輔さんの二人の会話を読み、次の問いに答えよ。

[問題1] すべての実数  $x$  で微分可能である関数  $f(x)$  が次の条件を満たしている。

(i)  $f'(0) = 0$

(ii) すべての実数  $x, p$  において等式  $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$  が成り立つ。

(ア)  $f(0)$  の値を求めよ。 (イ)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$  の値を求めよ。 (ウ) 導関数  $f'(x)$  を求めよ。

大輔：先生，この問題すごく難しそうですね。

先生：そうですね。では，ひとつずつヒントを与えるので，考えてみましょう。

先生：まず，条件(ii)は，等式  $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$  がどんな実数を代入しても成り立つということですね。

大輔：そうか。じゃあ，等式  $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$  に  $x = p = \boxed{24}$  を代入すると  $f(0)$  の値は  $\boxed{25}$  とわかりますね。

先生：そのとおり。では次に，(イ)ですね。大輔さんは「微分係数の定義式」は知っていますか？

大輔：ごめんなさい，覚えていません…。

先生：「微分係数の定義式」は覚えるのではなく，理解するものです。今から教えるので，しっかりと理解しましょう。まず，関数  $f(x)$  の  $x$  が  $a$  から  $a+h$  まで変わるときの平均変化率は知っていますか？

大輔：それは大丈夫です。2点  $(a, f(a))$  と  $(a+h, f(a+h))$  を結んでできる直線の傾きと同じものですよ？

先生：そうですね。「直線の傾き」というのは大事です。では，その平均変化率において， $h$  を限りなく  $0$  に近づけると，どのようになるかわかりますか？

大輔： $a+h$  がどんどん  $a$  に近づくので，2点  $(a, f(a))$  と  $(a+h, f(a+h))$  を結んでできる直線は，点  $(a, f(a))$  における接線に近づくし，この点における接線の傾きが微分係数になりますね！

先生：そのとおり！

大輔：はい。そうすると(イ)は(ア)の結果を利用すると，「微分係数の定義式」になっていることがわかるので， $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \boxed{26}$  となりますね。

先生：「微分係数の定義式」が理解できれば，「導関数の定義式」も理解できるので，(ウ)もできるかな？

大輔：「導関数の定義式」は  $\boxed{27}$  ですか？

先生：そうです。もうこれで(ウ)もできますね。

大輔：できます！先生，ありがとうございました。

(1)  $\boxed{24}$  ,  $\boxed{25}$  ,  $\boxed{26}$  に当てはまる値を答えよ。

(2)  $\boxed{27}$  に当てはまる最も適当なものを，次の①～③のうちから一つ選べ。

①  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

②  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}$$

(3)  $f'(x) = \textcircled{28}$  であり,  $f(x) = \textcircled{29}$  である。  $\textcircled{28}$ ,  $\textcircled{29}$  に当てはまる最も適当なものを, 次の  $\textcircled{0} \sim \textcircled{7}$  のうちから一つずつ選べ。

$$\textcircled{0} x - 1$$

$$\textcircled{1} x$$

$$\textcircled{2} 2x - 1$$

$$\textcircled{3} 2x$$

$$\textcircled{4} \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$\textcircled{5} \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\textcircled{6} x^2 - x + 2$$

$$\textcircled{7} x^2 + 1$$

〔問題2〕 関数  $f(x)$  がすべての実数  $x$  で微分可能であるとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1+2h)}{h}$$

を  $f'(1)$  を用いて表せ。

大輔：この問題も「微分係数の定義式」を利用するんですか？

先生：そのように見えるようになったことは、「微分係数の定義式」を理解したってことですね。

大輔：できました！  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1+2h)}{h} = \textcircled{30}$  ですか？

先生：正解です！これでもうしっかりと理解できましたね。

大輔：はい！ありがとうございます。

(4)  $\textcircled{30}$  に当てはまる式を  $f'(1)$  を用いて表せ。

〔問題3〕 関数  $f(x)$  がすべての実数  $x$  で微分可能であり,  $f(2) = 8$ ,  $f'(2) = 12$  のとき,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - x^2 f(2)}{x - 2} = \textcircled{31}$$

である。

(5)  $\textcircled{31}$  に当てはまる値を答えよ。