問題 先生と大輔さんの二人の会話を読み、次の問いに答えよ。

[問題1] すべての実数 x で微分可能である関数 $f(x)$ が次の条件を満たしている。

(i) $f'(0) = 0$

(ii) すべての実数 x, p において等式 $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$ が成り立つ。

(ア) $f(0)$ の値を求めよ。 (イ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$ の値を求めよ。 (ウ) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

大輔：先生，この問題すごく難しそうですね。

先生：そうですね。では，ひとつずつヒントを与えるので，考えてみましょう。

先生：まず，条件(ii)は，等式 $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$ がどんな実数を代入しても成り立つということですね。

大輔：そうか。じゃあ，等式 $f(x+p) = f(x) + f(p) + 2xp - 1$ に $x = p =$ 24 を代入すると $f(0)$ の値は 25 とわかりますね。

先生：そのとおり。では次に，(イ)ですね。大輔さんは「微分係数の定義式」は知っていますか？

大輔：ごめんなさい，覚えていません…。

先生：「微分係数の定義式」は覚えるのではなく，理解するものです。今から教えるので，しっかりと理解しましょう。まず，関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率は知っていますか？

大輔：それは大丈夫です。2点 $(a, f(a))$ と $(a+h, f(a+h))$ を結んでできる直線の傾きと同じものですよ？

先生：そうですね。「直線の傾き」というのは大事です。では，その平均変化率において， h を限りなく 0 に近づけると，どのようになるかわかりますか？

大輔： $a+h$ がどんどん a に近づくので，2点 $(a, f(a))$ と $(a+h, f(a+h))$ を結んでできる直線は，点 $(a, f(a))$ における接線に近づくし，この点における接線の傾きが微分係数になりますね！

先生：そのとおり！

大輔：はい。そうすると(イ)は(ア)の結果を利用すると，「微分係数の定義式」になっていることがわかるので， $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} =$ 26 となりますね。

先生：「微分係数の定義式」が理解できれば，「導関数の定義式」も理解できるので，(ウ)もできるかな？

大輔：「導関数の定義式」は 27 ですか？

先生：そうです。もうこれで(ウ)もできますね。

大輔：できます！先生，ありがとうございました。

(1) 24 , 25 , 26 に当てはまる値を答えよ。

(2) 27 に当てはまる最も適当なものを，次の①～③のうちから一つ選べ。

① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$

② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}$$

(3) $f'(x) = \textcircled{28}$ であり, $f(x) = \textcircled{29}$ である。 $\textcircled{28}$, $\textcircled{29}$ に当てはまる最も適当なものを, 次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{7}$ のうちから一つずつ選べ。

$$\textcircled{0} x - 1$$

$$\textcircled{1} x$$

$$\textcircled{2} 2x - 1$$

$$\textcircled{3} 2x$$

$$\textcircled{4} \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$\textcircled{5} \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\textcircled{6} x^2 - x + 2$$

$$\textcircled{7} x^2 + 1$$

〔問題2〕 関数 $f(x)$ がすべての実数 x で微分可能であるとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1+2h)}{h}$$

を $f'(1)$ を用いて表せ。

大輔：この問題も「微分係数の定義式」を利用するんですか？

先生：そのように見えるようになったことは、「微分係数の定義式」を理解したってことですね。

大輔：できました！ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1+2h)}{h} = \textcircled{30}$ ですか？

先生：正解です！これでもうしっかりと理解できましたね。

大輔：はい！ありがとうございます。

(4) $\textcircled{30}$ に当てはまる式を $f'(1)$ を用いて表せ。

〔問題3〕 関数 $f(x)$ がすべての実数 x で微分可能であり, $f(2) = 8$, $f'(2) = 12$ のとき,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - x^2 f(2)}{x - 2} = \textcircled{31}$$

である。

(5) $\textcircled{31}$ に当てはまる値を答えよ。