

**問題** 次の文章中のア～ノに適する符号または数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

$xyz$  空間に2点  $P((2-p)^2, 0, 0)$ ,  $Q(0, p^2, 4)$  がある。変数  $p$  が  $-2 \leq p \leq 2$  の範囲を変化するとき、線分  $PQ$  が動いてできる曲面と平面  $y = z$  で囲まれてできる立体を  $K$  とする。

線分  $PQ$  と平面  $\alpha: z = t$  ( $0 < t < 4$ ) の交点を  $R$  とする。 $R$  の座標を  $(x_r, y_r, z_r)$  とすると、

$$x_r = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \left( \text{ウ} - t \right) \left( \text{エ} - p \right)^2, \quad y_r = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} t p^2, \quad z_r = t$$

である。

ここで、 $p$  が  $-2 \leq p \leq 2$  の範囲を変化するとき、 $x_r$  のとり得る値の範囲は、

$$\text{キ} \leq x_r \leq \text{ク} \left( \text{ケ} - t \right)$$

である。

$-2 \leq p \leq 2$  のとき、 $y_r$  を  $x_r, t$  を用いて表すと、

$$y_r = t \left( \text{コ} - \sqrt{\frac{x_r}{\text{サ} - t}} \right)^2$$

である。

$0 < t < 4$  のとき、

$$a = \text{キ}, \quad b = \text{ク} \left( \text{ケ} - t \right), \quad f(x) = t \left( \text{コ} - \sqrt{\frac{x}{\text{サ} - t}} \right)^2$$

とおくと、

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\text{シ}} \left( \text{スセ} t - \text{ソ} t^{\text{タ}} \right)$$

であるから、 $K$  の体積は  $\frac{\text{ニヌネ}}{\text{ノ}}$  である。

(1)  $a_3 = \text{アイ}$ ,  $a_4 = \text{ウエオ}$  である。

(2)  $c_n = a_{2n-1}$  とおくと、

$$c_{n+1} = \text{カ} c_n + \text{キ}^{\text{ク}}$$

であるから、数列  $\{c_n\}$  の一般項は、

$$c_n = \frac{1}{2} \left( \text{ケ}^{\text{コ}} - \text{サ}^{\text{シ}} \right)$$

である。

(3)  $S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k$  とおくと、

$$S_n = \frac{1}{\text{ス}} \cdot \text{セ}^{\text{ソ}} - \text{タ}^{\text{チ}} + \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$$

である。

(4)  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot a_{2k-1}}{3^k}$  とおくと,

$$T_n = \frac{1}{\boxed{\text{ト}}} \left\{ \left( \boxed{\text{ナ}} n - 1 \right) \cdot \boxed{\text{ニ}}^{\boxed{\text{マ}}} - \boxed{\text{ネ}} n(n+1) + \boxed{\text{ノ}} \right\}$$

である。

[  ク ,  コ ,  シ ,  ソ ,  チ ,  ヌ の選択肢 ]

①  $2n - 1$

②  $n - 1$

③  $n$

④  $n + 1$

⑤  $2n + 1$

⑥  $2n + 3$

⑦  $3n$