2025 年度　慶應義塾大学　一般理系　第３問

問題　以下の設問 **(1)**(ii) に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。以下，すべての多項式は，実数を係数とする x についての多項式であるとする。

(1) (i)　3 次式 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ と 2 次式 $Q(x)=2x^2+1$ について，合成関数 $P(Q(x))$ は多項式 $\boxed{\text{（あ）}}$ で表される。

(ii)　多項式の積の展開より，2 つの多項式 $G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ と $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ の合成関数 $G(H(x))$ は多項式で表される。n が自然数であって $b_n \neq 0$ であるとき，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ となることを示しなさい。

(2)　$f(x)$ を 0 でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ h(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$$

と定める。さらに，$g(1)$ を a と表し，以下の 2 条件が成り立つとする。

- ある定数 b，c，d が存在して，x についての恒等式

$$g(h(x))-(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d)=0$$

が成り立つ。

- 等式 $f(1)=2(1-a)$ が成り立つ。

以下において（う），（き），（く），（せ）には数を入れ，他の空欄は a を用いて表しなさい。

(i)　$g(x)+h(x)=\boxed{\text{（い）}}$ であり，(1)(ii) を用いると，$g(x)$ は $\boxed{\text{（う）}}$ 次式であり，

$b=\boxed{\text{（え）}}$，$c=\boxed{\text{（お）}}$，$d=\boxed{\text{（か）}}$ であることがわかる。

(ii)　関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $a<\boxed{\text{（き）}}$ または $a>\boxed{\text{（く）}}$ である。a がこの条件を満たすとき，$g(x)$ は $x=\boxed{\text{（け）}}$ で極大値 M をとる。また，方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\boxed{\text{（け）}}$ と $x=\boxed{\text{（こ）}}$ である。

(iii)　曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ における接線の方程式は，$y=\boxed{\text{（さ）}}x+\boxed{\text{し}}$ である。さらに，

$$F(a)=\int_0^a \left\{g(x)-\boxed{\text{（さ）}}x-\boxed{\text{（し）}}-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\,dx$$

と定める。ただし，e は自然対数の底である。このとき，$F(a)=\boxed{\text{（す）}}$ と表され，a の関数 $F(a)$ の最大値は $\boxed{\text{（せ）}}$ である。

S_keio2025A_03.pbm