2025 年度　慶應義塾大学　一般理系　第２問

問題　以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄（か），（そ）には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい。

袋が 1 つ，赤玉 3 個，白玉 3 個が用意されている。赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，操作 T の手順を以下のように定める。

操作 T

袋から玉を 1 個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない。

n は自然数とする。

(1)　赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が 3 個である確率を a_n，2 個である確率を b_n，1 個である確率を c_n とする。このとき，次の関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \boxed{\text{（あ）}}\, a_n \\ b_{n+1} = \boxed{\text{（い）}}\, a_n + \boxed{\text{（う）}}\, b_n \\ c_{n+1} = \boxed{\text{（え）}}\, b_n + \boxed{\text{（お）}}\, c_n \end{cases}$$

が成り立つ。これより，a_n，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{\text{（か）}}$$

$$b_n = \boxed{\text{（き）}}\left\{\left(\boxed{\text{（く）}}\right)^n - \left(\boxed{\text{（け）}}\right)^n\right\}$$

$$c_n = \boxed{\text{（こ）}}\left\{\left(\boxed{\text{（さ）}}\right)^{n-1} + \boxed{\text{（し）}}\left(\boxed{\text{（す）}}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\text{（せ）}}\right)^{n-1}\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{（さ）}} > \boxed{\text{（せ）}}$ とする。

(2)　赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，ゲーム T のルールを以下のように定める。

ゲーム T

操作 T を 1 回施し，その結果，白玉が 3 個袋に入っている場合に限り 1 点を得る。

赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，ゲーム T を n 回行い終えたとき，1 回目から n 回目までに得た点の合計を X_n とし，$Y_n = 2^{X_n}$ と定める。このとき，Y_n の期待値は $\boxed{\text{（そ）}}$ であり，分散は $\boxed{\text{（た）}}\,2^{n-1} + \boxed{\text{（ち）}}\,n^2 + \boxed{\text{（つ）}}\,n + \boxed{\text{（て）}}$ である。