2024 年度　川崎医科大学　前期理系　第３問

問題　自然数 n に対して，定義域を $x \leqq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x) = x(1-x)^n,\ g_n(x) = x^2(1-x)^n$$

を定める。

(1)　$f_2(x)$ の導関数は，

$$f_2'(x) = \left(x - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

であり，$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。また，$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2)　すべての自然数 n に対して，

$$f_n(x) - g_n(x) = f_{n+\boxed{\text{コ}}}(x)$$

が成り立つ。

(3)　$f_n(x)$ の導関数は，

$$f_n'(x) = \boxed{\text{サ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{シ}}\right)x - \boxed{\text{ス}}\right\}(1-x)^{n-1}$$

であり，$g_n(x)$ の導関数は，

$$g_n'(x) = \boxed{\text{セ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{ソ}}\right)x - \boxed{\text{タ}}\right\}x(1-x)^{n-1}$$

である。

(4)　2 つの曲線 $y = f_n(x)$，$y = g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると，

$$S_n = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\left(n + \boxed{\text{ツ}}\right)\left(n + \boxed{\text{テ}}\right)}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする。

また，関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。