2019年度　川崎医科大学　前期理系　第２問

問題　箱Aには赤球1個と白球1個が，箱Bには赤球1個と白球2個が入っている。2つの箱から同時に1個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。n 回の操作後，箱Aに，赤球が2個入っている確率を a_n，赤球が1個だけ入っている確率を b_n，赤球が入っていない確率を c_n とする。

(1)　$a_1 = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$b_1 = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(2)　任意の自然数 n について，

$$a_n + b_n + c_n = \boxed{オ}$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} b_n + \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}} c_n$$

が成り立つ。

(3)　A，B，C を実数とし，b_n に関する漸化式

$$b_{n+2} + Ab_{n+1} - Bb_n = C$$

が成り立つとする。

(i)　$A = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$B = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$，$C = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(ii)　$p_n = b_n - x$ とし，$p_{n+2} + Ap_{n+1} - Bp_n = 0$ が成り立つとする。

このとき，$x = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。

さらに，実数 α，β ($\alpha < \beta$) が $(p_{n+2} - \alpha p_{n+1}) = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ を満たすとする。このとき，$\alpha = -\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$，$\beta = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である。

このことから，任意の自然数 n について，

$$b_n = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\alpha^n + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フヘ}}\beta^n + \frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$$

が成り立つ。したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}$ となる。