2019 年度　川崎医科大学　前期理系　第 2 問

問題　箱 A には赤球 1 個と白球 1 個が，箱 B には赤球 1 個と白球 2 個が入っている。2 つの箱から同時に 1 個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。n 回の操作後，箱 A に，赤球が 2 個入っている確率を a_n，赤球が 1 個だけ入っている確率を b_n，赤球が入っていない確率を c_n とする。

(1)　$a_1 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$b_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　任意の自然数 n について，

$$a_n + b_n + c_n = \boxed{\text{オ}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} c_n$$

が成り立つ。

(3)　A，B，C を実数とし，b_n に関する漸化式

$$b_{n+2} + Ab_{n+1} - Bb_n = C$$

が成り立つとする。

(i)　$A = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，$B = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$C = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(ii)　$p_n = b_n - x$ とし，$p_{n+2} + Ap_{n+1} - Bp_n = 0$ が成り立つとする。

このとき，$x = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

さらに，実数 α，β（$\alpha < \beta$）が $(p_{n+2} - \alpha p_{n+1}) = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ を満たすとする。このとき，$\alpha = -\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，$\beta = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

このことから，任意の自然数 n について，

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \alpha^n + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}} \beta^n + \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

が成り立つ。したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ となる。

S_kawasakiika2019A_02.pbm