

問題 n を自然数, a を正の定数とする。関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x + \frac{1}{n} \int_0^x f(t) dt$$

をみたし, 関数 $g(x)$ は

$$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$$

とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はある 1 点を共有し, その点における 2 つの曲線の接線が直交するとき, 次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底とする。

- (1) $h(x) = e^{-\frac{x}{n}} f(x)$ とおくとき, 導関数 $h'(x)$ と $h(x)$ を求めよ。
- (2) a を n を用いて表せ。
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3}$ を求めよ。