2023 年度　東京慈恵会医科大学　前期理系　第２問

問題　n を自然数，a を正の定数とする。関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x + \frac{1}{n}\int_0^x f(t)\,dt$$

をみたし，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$$

とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はある 1 点を共有し，その点における 2 つの曲線の接線が直交するとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　$h(x) = e^{-\frac{x}{n}} f(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ と $h(x)$ を求めよ。

(2)　a を n を用いて表せ。

(3)　2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3}$ を求めよ。

S_jikeiika2023A_02.pbm