

問題 a, b は互いに素である自然数の定数で、 $a \geq 2$ とする。 $0 < x \leq \pi$ のとき、

$$\begin{cases} \cos x \leq \cos 2ax \\ \sin 2ax \leq 0 \end{cases}$$

をみたす x の値の範囲は、互いに共通部分をもたない n 個の閉区間の和集合であり、それら n 個の閉区間の長さの値を小さい方から順に x_1, \dots, x_n とする。 $k = 1, \dots, n$ に対し $\theta_k = 2b(2a+1)x_k$ とおき、 xy 平面において、一般角 θ_k の動径と単位円との交点を Z_k とするとき、次の問いに答えよ。ただし、動径は原点を中心とし、 x 軸の正の部分を開始とする。

- (1) $n = a$ であり、 $\theta_k = 2k\pi \frac{b}{a}$ ($k = 1, \dots, a$) と表されることを示せ。
- (2) $k = 1, \dots, a$ に対し、 kb を a で割ったときの商を q_k 、余りを r_k とする。 $1 \leq i < j \leq a$ をみたす任意の自然数 i, j に対し $r_i \neq r_j$ を示し、点 Z_1, \dots, Z_a は単位円を a 等分する a 個の分点であることを示せ。