

問題 xy 平面上の点 (p, q) について, p, q がともに整数のときこの点を格子点と呼ぶ。また e を自然対数の底とすると, $p - e$ または $p + e$ のどちらかと, $q + \frac{1}{2}$ がともに整数のとき, この点を e 点と呼ぶことにする。例えば, $(p, q) = (1 - e, \frac{3}{2})$ は e 点である。

次の問いに答えよ。ただし, 素数の平方根と e が無理数であり, $2.7 < e < 2.8$ であることは証明なしに用いてよい。

- (1) 2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らないことを示せ。
- (2) 4 つの格子点を頂点とし, 1 辺の長さが 1 の任意の正方形の内部にある e 点の個数を求めよ。
- (3) 3 つの格子点を頂点とし, 1 辺が x 軸に平行, 1 辺が y 軸に平行な任意の直角三角形の面積は, この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示せ。
- (4) 3 つの格子点を頂点とする任意の三角形の面積は, この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示せ。
- (5) 3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しないことを示せ。