

問題 2 つの関数

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \text{ は実数の定数})$$

$$y = 2\log x$$

のグラフをそれぞれ C_1 , C_2 とする。2 曲線 C_1 , C_2 はただ 1 点を共有し、その点において共通な接線をもっている。

このとき、定数 a の値は $a = \frac{\text{ア}}{e^{\text{イ}}}$ である。以下、この条件のもとで考える。

(1) 2 曲線 C_1 , C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を D とする。

D の面積を T とすると

$$T = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} e - \frac{\text{オ}}{\text{カ}} e^{\text{キ}} - \text{ク}$$

である。

また、 D を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \left(e^{\text{サ}} - \frac{\text{シ}}{e^{\text{ス}}} - \text{セ} \right) \pi$$

である。

(2) 曲線 C_2 の $\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{3}$ の部分の長さを L とすると、 L は定積分

$$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^{\text{ソ}} + \text{タ}}}{x} dx$$

で求められる。

$\sqrt{x^{\text{ソ}} + \text{タ}} = t$ とおいて置換積分を行うと、

$$L = \text{チ} + \log \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$$

である。