

2023年度 大阪公立大学 前期理系 第4問

問題 p は素数とする。次の問いに答えよ。

- (4) j を $0 < j < p$ である整数とすると、二項係数 ${}_pC_j$ は p で割り切れることを示せ。
- (5) 自然数 m に対して $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (6) 自然数 m に対して $m^p - m$ は p で割り切れることを示せ。さらに m が p で割り切れないときには、 $m^{p-1} - 1$ が p で割り切れることを示せ。

ここで、次の集合 S を考える。

$$S = \{4n^2 + 4n - 1 \mid n \text{ は自然数}\}$$

例えば、 $n = 22$ とすると $4n^2 + 4n - 1 = 2023$ なので 2023 は S に属する。次の問いに答えよ。

- (7) 整数 a が S に属し、 $a = 4n^2 + 4n - 1$ (n は自然数) と表されているとする。このとき、 a と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。
- (8) p は 3 以上の素数とする。 p が S に属するある整数 a を割り切るならば、 $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れることを示せ。