

問題 自然数 n, s ($s < n$) に対して

$$I_n(s) = \int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s dx$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $s < n-1$ のとき、等式

$$I_n(s) = \frac{n-s}{s+1} I_n(s+1)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $I_n(s)$ を n と s を用いて表せ。

(3) 自然数 n, s ($s < n$) に対して、等式

$$\frac{1}{n\mathbf{C}_s} = \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{n+1}{n-s+k+1} {}_s\mathbf{C}_k$$

が成り立つことを示せ。ただし、 ${}_s\mathbf{C}_0 = {}_s\mathbf{C}_s = 1$ とする。