2018年度 大阪市立大学 前期理系 第2問

問題 n を自然数とする。 $0 \leq a_k \leq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

とおく。実数 x に対して

$$I_n(x) = b_n(1 - a_1x)(1 - a_2x)\cdots(1 - a_nx)$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) $a \geq 0$ とする。 $x \geq 0$ に対して不等式 $1 - ax \leq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\int_0^1 I_n(x) dx \leq 1$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 1$ が成り立つとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 I_n(x) dx = 1$$

となることを示せ。