

問題 a と b を互いに異なる正の定数とする。双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と x 軸との交点を $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ とする。 x_1 を $|x_1| > a$ を満たす実数とし、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と直線 $x = x_1$ との交点を $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1, -y_1)$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 実数 x_1, y_1 を用いて、直線 AP と直線 BQ の交点 R の座標を表せ。
- (2) (1) で求めた交点 $R(x, y)$ の軌跡を求めよ。
- (3) 原点 O を極とし、 x 軸の正の部分が始線とする極座標を (r, ϕ) とする。(2) で求めた軌跡を極座標 (r, ϕ) を用いて表せ。
- (4) (2) で求めた軌跡が表す図形を L とする。図形 L を、原点を中心にして反時計回りに角度 θ だけ回転させた図形を $L(\theta)$ とする。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。図形 L と図形 $L(\theta)$ の交点の個数を n とするとき、これら n 個の交点の極座標を、定数 a, b および角度 θ を用いて表せ。
- (5) (4) で求めた図形 L と図形 $L(\theta)$ の n 個の交点を $V_1, \dots, V_n$ とし、それらの極座標を $V_1(r_1, \phi_1), \dots, V_n(r_n, \phi_n)$ とする。ただし、 $r_1, \dots, r_n$ は正の数とし、 $0 \leq \phi_1 < \dots < \phi_n < 2\pi$ とする。角度 θ を $0 < \theta < \pi$ の範囲で動かしたとき、 n 角形 $V_1 \cdots V_n$ の面積の最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。