

2019年度 筑波大学 前期理系 第5問

**問題** 数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \frac{1}{2^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める。以下の問いに答えよ。

(1)  $t > 0$  のとき,  $1 \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^t$  であることを示せ。

(2) 数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \sum_{k=1}^n x_k \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $z_n$  は  $n$  によらない定数であることを示せ。

(3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$  を求めよ。