2019 年度　筑波大学　前期理系　第 5 問

問題　数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{2^n}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t > 0$ のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$ であることを示せ。

(2)　数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ。

N_tsukuba2019A_05.pbm