

2017年度 筑波大学 前期理系 第5問

問題 xy 平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、実数 a に対して、 a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

- (1) n を $0 \leq n \leq N$ を満たす整数とする。点 $(n, 0)$ と点 $\left(n, N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = x$ と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = N \sin\left(\frac{\pi x}{2N}\right)$ ($0 \leq x \leq N$) と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2) の $A(N)$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

N_tsukuba2017A_05.pbm