

問題 自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

- (1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ。
- (2) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成り立つような定数 p , q を2組求めよ。
- (4) a_n , b_n を n を用いて表せ。