

問題 自然数 n に対して

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^\pi (1+x) \sin^n x \, dx$$

とおく。

- (1) I_1 と I_2 を求めよ。答えは値のみを記せばよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき、等式 $n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n-1}I_n$ を n を用いて表せ。
- (4) $n \geq 2$ のとき、不等式 $I_n < I_{n-1}$ が成り立つことを示せ。
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 I_n^2$ を求めよ。