

問題

- (1) 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x) = a_n(x - n)(n + 1 - x)$$

とおく。2つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

- (2) $f_n(x)$ は (1) で定めたものとする。 $y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0 , $n \geq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$ を求めよ。