

問題 以下の問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。 $[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt - 1 \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$